

内心と傍心の軌跡 その2

参拾萬数学工房

(<http://www.300000.net/>)

§0 はじめに

本稿は、2007年発行^(脚注1)の『研究誌第39号』に寄稿した“内心と傍心の軌跡”^(脚注2)の続きである。

ユークリッド平面 \mathbb{R}^2 において^(脚注3)、2定点 $A(1,0)$, $B(-1,0)$ と動点 $P(p,q)$ (ただし $q \neq 0$) を頂点とする $\triangle PAB$ の内心・傍心を考える。

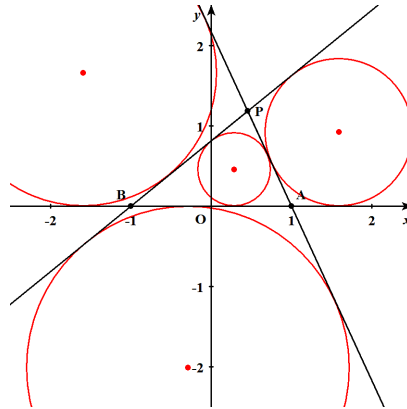


図1 $\triangle PAB$ と内接円・傍接円

§0.1 前稿の要点

$\triangle PAB$ の辺となる3直線は、それぞれ次のような式で表される^(脚注4)。

$$\text{直線 PA : } q(x-1) - (p-1)y = 0$$

$$\text{直線 PB : } q(x+1) - (p+1)y = 0$$

$$\text{直線 AB : } y = 0$$

(脚注1) 11年前。

(脚注2) 以下，“前稿”と呼ぶ。

(脚注3) 前稿では \mathbb{R}^2 で考察していることを明言していなかったが、射影平面 \mathbb{P}^2 での考察ではない。すなわち、無限遠点は考えないものとする。

(脚注4) 前稿で導いた式と見た目が違うが、分母を払って整理しただけで、同値である。次ページの $[a]$, $[b]$, そして $[a-1]$, $[a-2]$, $[b-1]$, $[b-2]$ も同様。

このとき、直線 PA と直線 AB のなす角を 2 等分する直線 (2 本ある) を **[a]**、直線 PB と直線 AB のなす角を 2 等分する直線 (2 本ある) を **[b]** とすると、これらはそれぞれ

$$\mathbf{[a]} \quad q(x-1)^2 - 2(p-1)(x-1)y - qy^2 = 0$$

$$\mathbf{[b]} \quad q(x+1)^2 - 2(p+1)(x+1)y - qy^2 = 0$$

と表される。 $q \neq 0$ のとき、**[a]**、**[b]** はそれぞれ実数の範囲で x と y の 1 次式に因数分解でき、次のことが導かれる。

- **[a]** は、次の 2 直線 **[a-1]**、**[a-2]** を表す (脚注 5)。

$$\mathbf{[a-1]} \quad q(x-1) + \left\{ -(p-1) + \sqrt{(p-1)^2 + q^2} \right\} y = 0$$

$$\mathbf{[a-2]} \quad q(x-1) + \left\{ -(p-1) - \sqrt{(p-1)^2 + q^2} \right\} y = 0$$

- **[b]** は、次の 2 直線 **[b-1]**、**[b-2]** を表す (脚注 6)。

$$\mathbf{[b-1]} \quad q(x+1) + \left\{ -(p+1) - \sqrt{(p+1)^2 + q^2} \right\} y = 0$$

$$\mathbf{[b-2]} \quad q(x+1) + \left\{ -(p+1) + \sqrt{(p+1)^2 + q^2} \right\} y = 0$$

そして、**[a]** と **[b]** を連立して x 、 y について解けば、 $\triangle PAB$ の内心 I_0 、及び傍心 I_1 、 I_2 、 I_3 の座標が得られる (脚注 7)。ここで、 I_0 は **[a-1]** と **[b-1]** との交点、 I_1 は **[a-1]** と **[b-2]** との交点、 I_2 は **[a-2]** と **[b-1]** との交点、 I_3 は **[a-2]** と **[b-2]** との交点である。

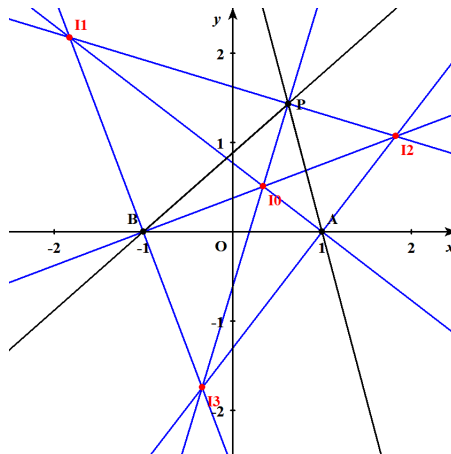


図 2 I_0 , I_1 , I_2 , I_3

(脚注 5) 前稿では触れそびれてしまったが、当然ながら **[a-1]** と **[a-2]** は垂直である。

(脚注 6) 前稿では触れそびれてしまったが、当然ながら **[b-1]** と **[b-2]** は垂直である。

(脚注 7) 前稿では $I_0 \sim I_3$ の座標を求めなかったが、本稿では後ほど § 0.3 で求める。

- 前稿の §1 では、動点 P が辺 AB に平行な直線上を動くときの $I_0 \sim I_3$ の軌跡を、次のように求めた。

q を 0 でない定数とする。動点 P が直線 $y = q$ 上を動くときの $I_0 \sim I_3$ の軌跡は、

$$-2y(x^2-1) + q(x^2+y^2-1) = 0$$

これは 楕円曲線 である。

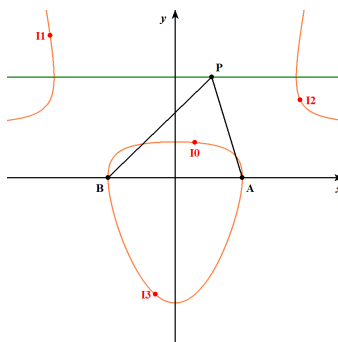


図 3 動点 P が辺 AB に平行な直線上を動くときの $I_0 \sim I_3$ の軌跡

- 前稿の §2 では、動点 P が辺 AB に垂直な直線上を動くときの $I_0 \sim I_3$ の軌跡を、次のように求めた。

p を定数とする。動点 P が直線 $x = p$ 上を動くときの $I_0 \sim I_3$ の軌跡は、

$$x(x^2-y^2-1) - p(x^2+y^2-1) = 0$$

$p = -1, 0, 1$ のときを除き、これは 楕円曲線 である。

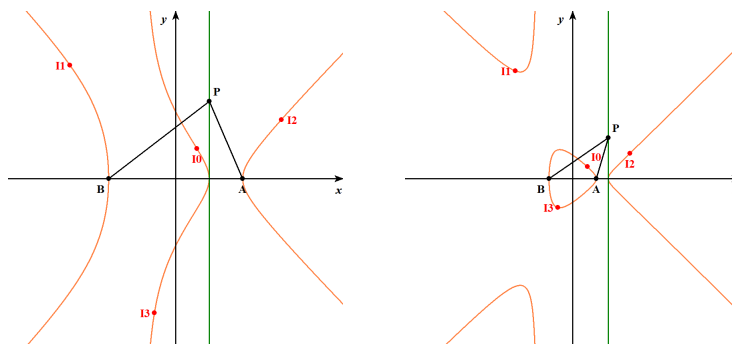


図 4 動点 P が辺 AB に垂直な直線上を動くときの $I_0 \sim I_3$ の軌跡

- 前稿の §3 では、動点 P が辺 AB の中点を通る直線上を動くときの $I_0 \sim I_3$ の軌跡を、次のように求めた。

a を 0 でない定数とする。動点 P が直線 $y = ax$ 上を動くときの $I_0 \sim I_3$ の軌跡は、

$$ax(x^2 - y^2 - 1) - 2y(x^2 - 1) = 0$$

これは 楕円曲線 である。

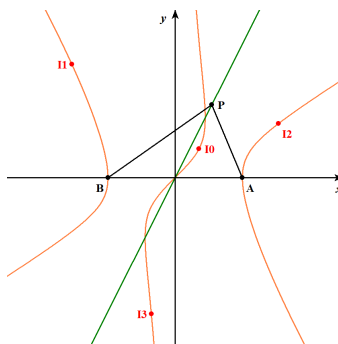


図5 動点 P が辺 AB の中点を通る直線上を動くときの $I_0 \sim I_3$ の軌跡

§ 0.2 本稿の概要

前稿では「動点 P が“特別な直線 l ” 上を動く場合」の $I_0 \sim I_3$ の軌跡について、それぞれ個別に考察した。しかしその後、「動点 P が“任意の直線 l ” 上を動く場合」に一般化して、一括して考察する方法を思いついた。それを、本稿の §1 で述べる。

また、前稿の §3 で、「動点 P が“辺 AB の中点を通る直線 l ” 上を動く場合」の $I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} に対して、「動点 P が曲線 \mathcal{E} 上にあるとき、4 点 I_0, I_1, I_2, I_3 は、(楕円曲線上の点の加法に関して) クラインの 4 元群をなす」という予想を述べた。これを「動点 P が“任意の直線 l ” 上を動く場合」に一般化したものを、本稿の §2 で述べる (脚注 8)。

§ 0.3 $I_0 \sim I_3$ の座標

ところで、前稿では必要がなかったために、 I_0, I_1, I_2, I_3 の座標を求めていなかった。点 P が任意の点 (p, q) である場合に対して、これらの座標をここで求めておく (脚注 9)。

(脚注 8) 直線 l が直線 AB と一致する場合は除外する。(動点 P が直線 AB 上を動いても $\triangle PAB$ が作られないため。)

(脚注 9) 2 直線の交点を求めるだけ、すなわち 2 元 1 次方程式を解くだけではあるにも関わらず、計算はとてつもなく煩雑である。

- I_0 は 2 直線 $[a-1]$, $[b-1]$ の交点であり, 座標は

$$I_0 \left(\frac{2p - \sqrt{(p-1)^2 + q^2} + \sqrt{(p+1)^2 + q^2}}{2 + \sqrt{(p-1)^2 + q^2} + \sqrt{(p+1)^2 + q^2}}, \frac{2q}{2 + \sqrt{(p-1)^2 + q^2} + \sqrt{(p+1)^2 + q^2}} \right)$$

x 座標, y 座標に対して, それぞれ分母を有理化すると,

$$I_0 \left(\frac{-\sqrt{(p-1)^2 + q^2} + \sqrt{(p+1)^2 + q^2}}{2}, \frac{(-\sqrt{(p-1)^2 + q^2} - (p-1))(\sqrt{(p+1)^2 + q^2} - (p+1)) + q^2}{2q} \right)$$

- I_1 は 2 直線 $[a-1]$, $[b-2]$ の交点であり, 座標は

$$I_1 \left(\frac{2p - \sqrt{(p-1)^2 + q^2} - \sqrt{(p+1)^2 + q^2}}{2 + \sqrt{(p-1)^2 + q^2} - \sqrt{(p+1)^2 + q^2}}, \frac{2q}{2 + \sqrt{(p-1)^2 + q^2} - \sqrt{(p+1)^2 + q^2}} \right)$$

x 座標, y 座標に対して, それぞれ分母を有理化すると,

$$I_1 \left(\frac{-\sqrt{(p-1)^2 + q^2} - \sqrt{(p+1)^2 + q^2}}{2}, \frac{(-\sqrt{(p-1)^2 + q^2} - (p-1))(-\sqrt{(p+1)^2 + q^2} - (p+1)) + q^2}{2q} \right)$$

- I_2 は 2 直線 $[a-2]$, $[b-1]$ の交点であり, 座標は

$$I_2 \left(\frac{2p + \sqrt{(p-1)^2 + q^2} + \sqrt{(p+1)^2 + q^2}}{2 - \sqrt{(p-1)^2 + q^2} + \sqrt{(p+1)^2 + q^2}}, \frac{2q}{2 - \sqrt{(p-1)^2 + q^2} + \sqrt{(p+1)^2 + q^2}} \right)$$

x 座標, y 座標に対して, それぞれ分母を有理化すると,

$$I_2 \left(\frac{\sqrt{(p-1)^2 + q^2} + \sqrt{(p+1)^2 + q^2}}{2}, \frac{(\sqrt{(p-1)^2 + q^2} - (p-1))(\sqrt{(p+1)^2 + q^2} - (p+1)) + q^2}{2q} \right)$$

- I_3 は 2 直線 $[a-2]$, $[b-2]$ の交点であり, 座標は

$$I_3 \left(\frac{2p + \sqrt{(p-1)^2 + q^2} - \sqrt{(p+1)^2 + q^2}}{2 - \sqrt{(p-1)^2 + q^2} - \sqrt{(p+1)^2 + q^2}}, \frac{2q}{2 - \sqrt{(p-1)^2 + q^2} - \sqrt{(p+1)^2 + q^2}} \right)$$

x 座標, y 座標に対して, それぞれ分母を有理化すると,

$$I_3 \left(\frac{\sqrt{(p-1)^2 + q^2} - \sqrt{(p+1)^2 + q^2}}{2}, \frac{(\sqrt{(p-1)^2 + q^2} - (p-1))(-\sqrt{(p+1)^2 + q^2} - (p+1)) + q^2}{2q} \right)$$

分母の有理化に対する Before / After を見比べればわかる通り, 分母の有理化によって各点の x 座標は簡素になるが, しかし y 座標は複雑となってしまふ。これらの数値を計算に使用する際には, 適切に使い分ける (脚注 10)。

(脚注 10) 本稿では, §1.5 では分母の有理化前の座標を用い, §2.1 と §2.2 では分母の有理化後の座標を用いた。

§ 1 前稿の拡張

$\vec{v} = (a, b) \neq \vec{0}$ とし, \vec{v} に平行で点 (c, d) を通る直線を l とする。

動点 $P(p, q)$ が直線 l 上を動くとき, p, q は, 媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} p = at + c \\ q = bt + d \end{cases}$$

と書くことができる。これを行列で表すと

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

ここで, 今後の簡便のため, 行列 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ の行列式を M とおくことにする。すなわち

$$M = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

とする。このとき, 直線 l は $bx - ay + M = 0$ である。

以下, 動点 P がこの直線 l 上を, すなわち直線 $bx - ay + M = 0$ 上を動くときの $I_0 \sim I_3$ の軌跡を \mathcal{E} とする。

* * *

曲線 \mathcal{E} の式は, 前述の 2 式 $[a], [b]$ に $p = at + c, q = bt + d$ を代入してからこれらを連立して t を消去すれば求められる。このとてつもなく面倒な計算をがんばって実行すると, 次の結果が得られる (脚注 11)。

ベクトル $\vec{v} = (a, b)$ に平行な直線 $bx - ay + M = 0$ を通る直線を l とする。
動点 $P(p, q)$ が直線 l 上を動くときの $I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} は, 次の式で表される。

$$\boxed{bx(x^2 - y^2 - 1) - 2ay(x^2 - 1) + M(x^2 + y^2 - 1) = 0} \quad \dots \textcircled{\ast}$$

(脚注 11) 正確には, 得られる等式は

$$bx^3y - 2ax^2y^2 - bxy^3 + Mx^2y + My^3 - bxy + 2ay^2 - My = 0$$

(ここでは高次の順に項を並べた) であるが, 左辺を y でくくると

$$y(bx^3 - 2ax^2y - bxy^2 + Mx^2 + My^2 - bx + 2ay - M) = 0$$

となり, $y \neq 0$ から

$$bx^3 - 2ax^2y - bxy^2 + Mx^2 + My^2 - bx + 2ay - M = 0$$

が得られる。これを a, b, M に関して整理したものが式 $\textcircled{\ast}$ である。

§ 1.1 前稿との比較

式⑤を、前稿で求めた等式と比較しよう。

- 動点 P が直線 $y = d$ (ただし $d \neq 0$) 上を動くとき、
直線 $y=d$ を「 $\vec{v} = (1, 0)$ に平行で点 $(0, d)$ を通る直線」とみなし、 $a=1, b=0, c=0$ とおくと、 $M = 1 \cdot d - 0 \cdot 0 = d$ であるから、式⑤は

$$-2y(x^2-1) + d(x^2+y^2-1) = 0$$

となる。ここで、定数 d を q と置き換えれば、前稿の §1 で求めた等式と一致する。

- 動点 P が直線 $x = c$ 上を動くとき、
直線 $x=c$ を「 $\vec{v} = (0, 1)$ に平行で点 $(c, 0)$ を通る直線」とみなし、 $a=0, b=1, d=0$ とおくと、 $M = 0 \cdot 0 - 1 \cdot c = -c$ であるから、式⑤は

$$x(x^2-y^2-1) - c(x^2+y^2-1) = 0$$

となる。ここで、定数 c を p と置き換えれば、前稿の §2 で求めた等式と一致する。

- 動点 P が直線 $y = bx$ (ただし $b \neq 0$) 上を動くとき、
直線 $y=bx$ を「 $\vec{v} = (1, b)$ に平行で点 $(0, 0)$ を通る直線」とみなし、 $a=1, c=0, d=0$ とおくと、 $M = 1 \cdot 0 - b \cdot 0 = 0$ であるから、式⑤は

$$bx(x^2-y^2-1) - 2y(x^2-1) = 0$$

となる。ここで、定数 b を a と置き換えれば、前稿の §3 で求めた等式と一致する。

§ 1.2 $I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} の漸近線

$I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} の式⑤

$$bx(x^2-y^2-1) - 2ay(x^2-1) + M(x^2+y^2-1) = 0$$

は、 $b \neq 0$ のとき、次のように同値変形できる (脚注 12) (脚注 13)。

$$\left\{ bx + \left(-a + \sqrt{a^2 + b^2} \right) y + M \right\} \left\{ bx + \left(-a - \sqrt{a^2 + b^2} \right) y + M \right\} (bx - M) = (b^2 - M^2)(bx - 2ay + M)$$

(脚注 12) 等式変形の過程で両辺に b^2 を掛けているため、 $b = 0$ のときは同値ではない。

(変形前の式⑤は $b = 0$ のときも x と y を共に含む 3 次式であるが、変形後の式は $b = 0$ のときには x を含まない 3 次式となっている。このことから、 $b = 0$ のときに同値ではないことは明白である。)

(脚注 13) この式変形は、「直線 AB (すなわち x 軸) と直線 l のなす角の二等分線 (2 本ある)」が曲線 \mathcal{E} の漸近線となることを見てとれたことを利用して、天下り的におこなった。

このことから、 $b \neq 0$ のとき、曲線 \mathcal{E} は次の 3 直線を漸近線とする曲線であることがわかる。

$$\text{[漸近線 1]} \quad bx + (-a + \sqrt{a^2 + b^2})y + M = 0$$

$$\text{[漸近線 2]} \quad bx + (-a - \sqrt{a^2 + b^2})y + M = 0$$

$$\text{[漸近線 3]} \quad bx - M = 0$$

ちなみに、[漸近線 1] と [漸近線 2] は、直線 AB (すなわち x 軸) と直線 l のなす角の二等分線である。したがって、直線 AB と直線 l との交点 $(-\frac{M}{b}, 0)$ を C とするとき、[漸近線 1] と [漸近線 2] は点 C で直交する。

また、線分 AB の中点 (すなわち原点 $O(0,0)$) に関して点 $C(-\frac{M}{b}, 0)$ と対称な点 $(\frac{M}{b}, 0)$ を C' とするとき、[漸近線 3] は、点 C' を通り直線 AB に垂直な直線である。

§ 1.2 の例 1

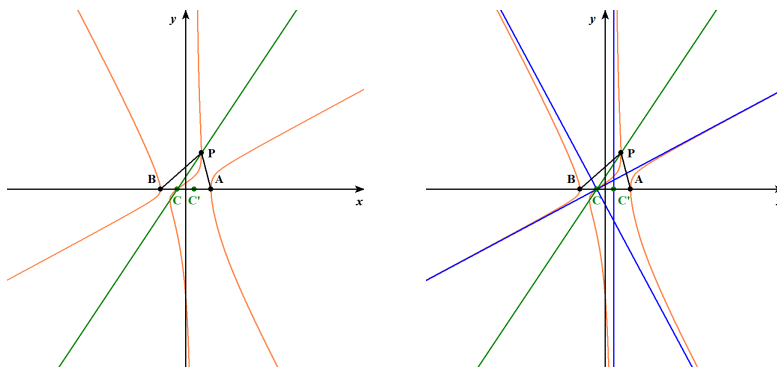


図 6 曲線 \mathcal{E} とその漸近線

§ 1.2 の例 2

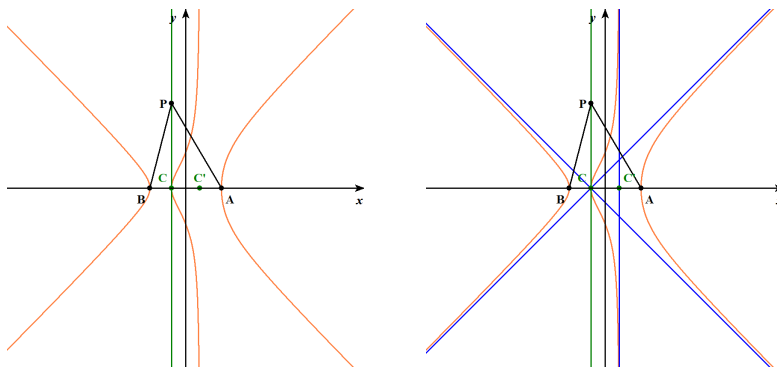


図 7 曲線 \mathcal{E} とその漸近線

§ 1.2 の例 3

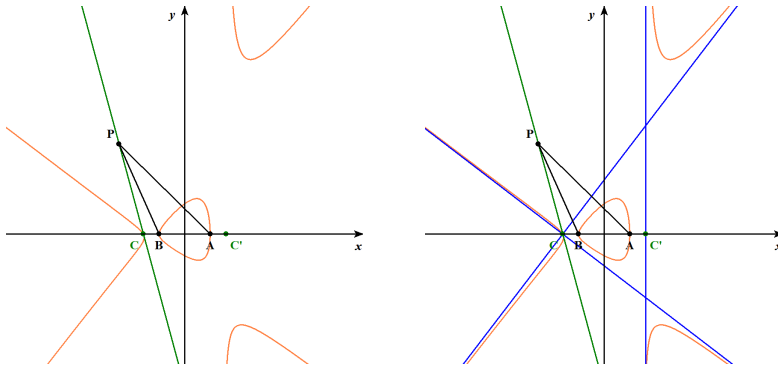


図 8 曲線 \mathcal{E} とその漸近線

§ 1.3 $I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} が楕円曲線であること

まず、一般論として、 x の 4 次多項式 $g(x)$ の複素零点の 1 つを α とするとき、4 次曲線 $u^2 = g(x)$ は、

$$u = \frac{Y}{X^2}, \quad x = \frac{1}{X} + \alpha$$

と置換して整理することにより、曲線

$$Y^2 = g'(\alpha)X^3 + \frac{g''(\alpha)}{2}X^2 + \frac{g'''(\alpha)}{6}X + \frac{g''''(\alpha)}{24}$$

と双有理同値となることが知られている (脚注 14)。

この知識を利用するために、

$$\boxed{bx(x^2 - y^2 - 1) - 2ay(x^2 - 1) + M(x^2 + y^2 - 1) = 0} \quad \dots \textcircled{\ast}$$

を、次のように同値変形する (脚注 15)。

$$\{(bx - M)y + a(x^2 - 1)\}^2 = \{(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 + M^2)\}(x^2 - 1) \quad \dots \textcircled{\ast}'$$

式 $\textcircled{\ast}'$ の右辺を $g(x)$ とすると、 $g(x)$ は 1 を零点に持つ。したがって、式 $\textcircled{\ast}'$ に

$$(bx - M)y + a(x^2 - 1) = \frac{Y}{X^2}, \quad x = \frac{1}{X} + 1$$

を代入して整理すると、

(脚注 14) 参考文献 [1] “楕円曲線論入門” P44-[問題 1.15.] の (a)

(脚注 15) 変数 y について平方完成。

$$Y^2 = (2b^2 - 2M^2)X^3 + (4a^2 + 5b^2 - M^2)X^2 + (4a^2 + 4b^2)X + (a^2 + b^2) \quad \dots \textcircled{\star}$$

となる。また、式 $\textcircled{\star}$ に

$$X = \frac{1}{x-1}, \quad Y = \frac{(bx-M)y + a(x^2-1)}{(x-1)^2}$$

を代入して整理すると、式 $\textcircled{\star}$ に戻る。したがって、式 $\textcircled{\star}$ と式 $\textcircled{\star}$ は「双有理同値」である。

* * *

次に、式 $\textcircled{\star}$ が表す図形が楕円曲線であるための条件（すなわち式 $\textcircled{\star}$ で表される $I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} が楕円曲線であるための条件）を考える（脚注 16）。

今後の簡便のため、式 $\textcircled{\star}$ の右辺を $F(X)$ とする。すなわち

$$F(X) = (2b^2 - 2M^2)X^3 + (4a^2 + 5b^2 - M^2)X^2 + (4a^2 + 4b^2)X + (a^2 + b^2)$$

とする。

式 $\textcircled{\star}$ が表す図形が楕円曲線であるためには、次の 2 条件を両方とも満たすことが必要十分である。

- [I] $F(X)$ が 3 次式であること。（すなわち、 $F(X)$ の X^3 の係数が 0 でないこと。）
- [II] 3 次方程式 $F(X) = 0$ が重解を持たないこと。

この 2 つの条件を、順に考察する。

- [I] $2b^2 - 2M^2 \neq 0 \iff (b+M)(b-M) \neq 0 \iff b \pm M \neq 0$ であり、 M を $ad - bc$ に戻すと $b \pm (ad - bc) \neq 0$ である。これをさらに変形して $b(c \pm 1) \neq ad$ とすることにより、 $F(X)$ の X^3 の係数が 0 でないための必要十分条件は

$$a : b \neq (c \pm 1) : d$$

であることがわかる。この条件は、

「直線 ℓ が 2 点 A, B のどちらも通らないこと」

と同値である。

- [II] $F(X)$ は条件 [I] を満たしているものとする。（すなわち、3 次式であるとする。）
3 次方程式 $F(X) = 0$ が重解を持たない条件を、判別式を利用して求めるのはあまりに大変すぎるため（脚注 17）、他の方法で考える。

(脚注 16) 以下でおこなう考察は複雑であるが、本節 § 1.3 の末尾に、もっと簡単な方法を追記した。

(脚注 17) 3 次方程式 $aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$ の判別式 D は、 $D = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd$ である。
3 次方程式 $(2b^2 - 2M^2)X^3 + (4a^2 + 5b^2 - M^2)X^2 + (4a^2 + 4b^2)X + (a^2 + b^2) = 0$ の判別式は……。

まず、 $F(X)$ を、次のように因数分解する。

$$F(X) = \{(b^2 - M^2)X^2 + 2(a^2 + b^2)X + (a^2 + b^2)\} \cdot (2X + 1)$$

今後の簡便のため、右辺の第一因数を $G(X)$ とおく。すなわち、

$$G(X) = (b^2 - M^2)X^2 + 2(a^2 + b^2)X + (a^2 + b^2)$$

とおき、 $F(X) = G(X) \cdot (2X + 1)$ とする。

$F(X)$ が 3 次式であるという仮定のもとにおいて、 $G(X)$ は 2 次式である。

3 次方程式 $F(X) = 0$ が重解を持たないためには、次の 2 条件を両方とも満たすことが必要十分である。

[II-a] 2 次方程式 $G(X) = 0$ が重解を持たないこと。

[II-b] 2 次方程式 $G(X) = 0$ が $X = -\frac{1}{2}$ を解に持たないこと。

この 2 つの条件を、順に考察する。

[II-a] 2 次方程式 $G(X) = 0$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a^2 + b^2)^2 - (b^2 - M^2)(a^2 + b^2) \\ &= \{(a^2 + b^2) - (b^2 - M^2)\}(a^2 + b^2) \\ &= (a^2 + M^2)(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

したがって、2 次方程式 $G(X) = 0$ が重解を持つための必要十分条件は

$$(a^2 + M^2)(a^2 + b^2) = 0$$

である。ここで、 $\vec{v} = (a, b) \neq \vec{0}$ であることから $a^2 + b^2 \neq 0$ である。したがって、

$$a^2 + M^2 = 0$$

となる。これは、さらに

$$a = 0 \quad \text{かつ} \quad M = 0$$

と書き換えることができる。

$M = 0$ は、 M を $ad - bc$ に戻すと $ad - bc = 0$ と書けるが、 $a = 0$ より $bc = 0$ となり、さらに、 $\vec{v} = (a, b) \neq \vec{0}$ より $b \neq 0$ なので、 $c = 0$ となる。

結局、2 次方程式 $G(X) = 0$ が重解を持つための必要十分条件は

$$a = 0 \quad \text{かつ} \quad c = 0$$

である。この条件は、「直線 l が線分 AB の垂直二等分線であること」と同値である。

以上より、2次方程式 $G(X) = 0$ が重解を持たないための必要十分条件は

「直線 l が線分 AB の垂直二等分線ではないこと

である。

[II-b] 2次方程式 $G(X) = 0$ に $X = -\frac{1}{2}$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{b^2 - M^2}{4} - (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow b^2 - M^2 &= 0\end{aligned}$$

しかしこれは、 $F(X)$ が3次方程式である（すなわち、 $F(X)$ の X^3 の係数が0でない）という仮定に反する。

したがって、 $F(X) = 0$ が3次方程式であるならば、2次方程式 $G(X) = 0$ は $X = -\frac{1}{2}$ を解に持たない。

以上 [I], [II] より、

[あ] 直線 l が2点 A , B のどちらかを通るとき

[い] 直線 l が線分 AB の垂直二等分線であるとき

という2通りの特別な場合を除き、式 $\textcircled{\ast}$ が表す図形は、(すなわち、式 $\textcircled{\ast}$ で表される $I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} は、) 楕円曲線である。

§ 1.3 の補足

§ 1.3 の本文では長い検証をしているが、実は、曲線 \mathcal{E} が楕円曲線であることを示すためには「式 $\textcircled{\ast}$ 'の右辺(すなわち $g(x)$)の零点がすべて相異なること」を示せば十分である。(→ 参考文献 [1] “楕円曲線論入門” P44-[問題 1.15.] の (b))

$g(x) = \{(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 + M^2)\}(x^2 - 1)$ の零点は $\pm \sqrt{\frac{a^2 + M^2}{a^2 + b^2}}$, ± 1 であるから、これら4数がすべて相異なるのは

$$[I]' \quad M^2 \neq b^2$$

$$[II]' \quad a^2 + M^2 \neq 0$$

の両条件を満たすときである。

これらは、本文で述べた条件 [I], [II] と同値である。

§ 1.4 $I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} が楕円曲線にならない場合

式④が表す図形が（すなわち、式⑤で表される $I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} が）楕円曲線とならないのは、§ 1.3 で述べた [あ], [い] の 2 通りの場合である。これらの場合の $I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} について、本節で述べる。

[あ] 「動点 P が点 A を通る直線 l 上を動く場合」について (脚注 18) (脚注 19), まずは幾何的に考察する。ただし、直線 l が直線 AB と一致する場合は除外する。(動点 P が直線 AB 上を動いても $\triangle PAB$ が作られないため。)

動点 $P(p, q)$ (ただし $q \neq 0$) が直線 l 上を動いても直線 PA は動かないので (脚注 20), $I_0 \sim I_3$ は常に「直線 PA と直線 AB のなす角を 2 等分する 2 直線」上を動くことが、容易にわかる。本稿の § 0.1 (前稿の要点) で振り返っておいた通り、その 2 直線は

$$\text{[a-1]} \quad q(x-1) + \left\{ -(p-1) + \sqrt{(p-1)^2 + q^2} \right\} y = 0$$

$$\text{[a-2]} \quad q(x-1) + \left\{ -(p-1) - \sqrt{(p-1)^2 + q^2} \right\} y = 0$$

である。ここで、直線 l の方向ベクトル \vec{v} が

$$\vec{v} = (p-1, q)$$

(ただし $q \neq 0$) であることから、 $p-1 = a$, $q = b$ (ただし $b \neq 0$) と置き換えると

$$\text{[a-1]}' \quad b(x-1) + \left\{ -a + \sqrt{a^2 + b^2} \right\} y = 0$$

$$\text{[a-2]}' \quad b(x-1) + \left\{ -a - \sqrt{a^2 + b^2} \right\} y = 0$$

である。

さて、今度は、 $I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} を式⑤から計算で求めてみよう。直線 l が点 $A(1, 0)$ を通るので、 $c = 1$, $d = 0$ とおくと、 $M = a \cdot 0 - b \cdot 1 = -b$ であるから、式⑤は

$$bx(x^2 - y^2 - 1) - 2ay(x^2 - 1) - b(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

となる。さらに、これは $b \neq 0$ のとき実数の範囲で因数分解できて、

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{b} \times \left\{ \left(a + \sqrt{a^2 + b^2} \right) (x-1) - by \right\} \\ & \times \left\{ \left(a - \sqrt{a^2 + b^2} \right) (x-1) - by \right\} \times (x+1) = 0 \end{aligned}$$

(脚注 18) 「動点 P が点 B を通る直線上を動く場合」については、対称性からすぐ導かれるので割愛する。

(脚注 19) 「動点 P が、辺 AB に垂直で点 A を通る直線上を動く場合」については、前稿 §2 の [例 2-3] で考察済みであるが、ここでは辺 AB に垂直であるとは限らない一般形で考察する。

(脚注 20) 直線 l と直線 PA は、同じ直線である。

となる。したがって、 $b \neq 0, c = 1, d = 0$ の場合の式⑤が表す図形は、3直線

$$[\mathbf{a-1}]'' \quad \left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)(x - 1) - by = 0$$

$$[\mathbf{a-2}]'' \quad \left(a - \sqrt{a^2 + b^2}\right)(x - 1) - by = 0$$

$$[\mathbf{a-3}]'' \quad x + 1 = 0$$

の和集合である。

また、少し手を動かせば、 $[\mathbf{a-1}]'$ 式と $[\mathbf{a-1}]''$ 式、 $[\mathbf{a-2}]'$ 式と $[\mathbf{a-2}]''$ 式がそれぞれ同値であることが、すぐにわかる。

すなわち、つまり、「動点 P が点 A を通る直線上を動く場合」の $I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} は、式⑤が表す図形の部分集合である (脚注 21)。

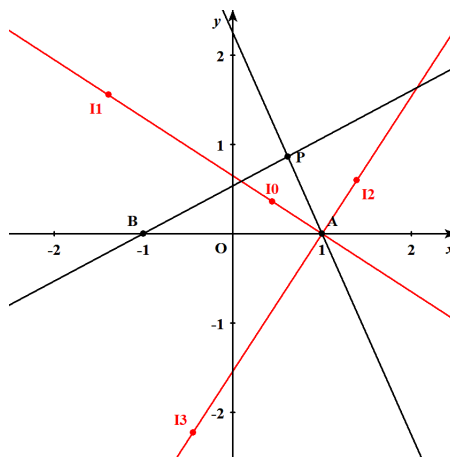


図9 直線 l が点 A を通るときの I_0, I_1, I_2, I_3 の軌跡 \mathcal{E}

(脚注 21) 直線 $[\mathbf{a-1}]''$ は I_0 と I_1 の軌跡, 直線 $[\mathbf{a-2}]''$ は I_2 と I_3 の軌跡であるが, 直線 $[\mathbf{a-3}]''$ は, $I_0 \sim I_3$ のどの点の軌跡でもない。直線 $[\mathbf{a-3}]''$ は, § 1.2 で求めた漸近線の名残と考えられる。(x 軸と $(1, 0)$ 以外の点 C で交わる直線 l を, 点 C が $(1, 0)$ に近づくように平行移動させると, 軌跡 \mathcal{E} の 3 本の漸近線はそれぞれ 3 直線 $[\mathbf{a-1}]''$, $[\mathbf{a-2}]''$, $[\mathbf{a-3}]''$ に近づく。)

[い] 「動点 P が線分 AB の垂直二等分線上を動く場合 (すなわち, 直線 $x = 0$ 上を動く場合)」については, 前稿 §2 の [例 2-1] で考察済みであるが, 本稿でも改めて述べる。直線 $x = 0$ を「 $\vec{v} = (0, 1)$ に平行で点 $(0, 0)$ を通る直線」とみなし, $a = 0, b = 1, c = 0, d = 0$ とおくと, $M = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0$ であるから, 式⑤は

$$x(x^2 - y^2 - 1) = 0$$

となる。

つまり, 「動点 P が直線 $x = 0$ 上を動く場合」の $I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} は

直線 $x = 0$ と双曲線 $x^2 - y^2 - 1 = 0$ の和集合

である (脚注 22)。

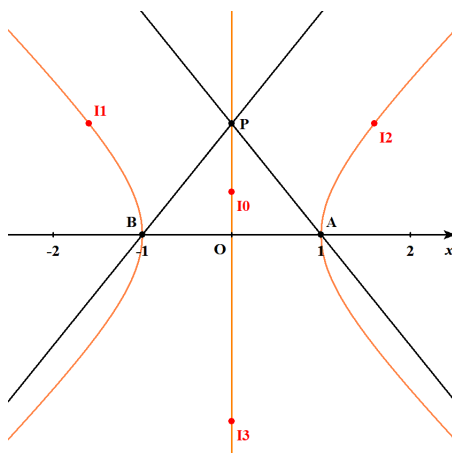


図 10 直線 l が線分 AB の垂直二等分線であるときの I_0, I_1, I_2, I_3 の軌跡 \mathcal{E}

(脚注 22) 直線 $x = 0$ が I_0 と I_3 の軌跡で, 双曲線 $x^2 - y^2 - 1 = 0$ が I_1 と I_2 の軌跡である。

§ 1.5 $I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} の接線の傾き

式⊗ ($bx(x^2-y^2-1) - 2ay(x^2-1) + M(x^2+y^2-1) = 0$) を x で微分して整理すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3bx^2 - 4axy - by^2 + 2Mx - b}{2ax^2 + 2bxy - 2My - 2a}$$

となる (脚注 23)。また、これの分母・分子を y^2 で割ると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3b(x/y)^2 - 4a(x/y) - b + 2M(x/y)(1/y) - b(1/y)^2}{2a(x/y)^2 + 2b(x/y) - 2M(1/y) - 2a(1/y)^2}$$

となる (脚注 24)。§ 0.3 で求めておいた $I_0 \sim I_3$ の座標をこの $\frac{dy}{dx}$ に代入すれば、各点における各接線の傾きを求めることができる。その計算結果を以下に列記する (脚注 25)。ただし、 $\sqrt{(p-1)^2+q^2} = \alpha$ 、 $\sqrt{(p+1)^2+q^2} = \beta$ である (脚注 26) (脚注 27)。

- I_0 における接線の傾きは、

$$\frac{-(p+1)\{b(p+1)-aq\}\alpha - (p-1)\{b(p-1)-aq\}\beta - 2b\alpha\beta}{\{2a(p^2-q^2-1)+4bpq\} - \{a(2(p+1)+q^2)+bq(p-1)\}\alpha + \{a(2(p-1)-q^2)+bq(p+1)\}\beta - 2a\alpha\beta}$$

- I_1 における接線の傾きは、

$$\frac{-(p+1)\{b(p+1)-aq\}\alpha + (p-1)\{b(p-1)-aq\}\beta + 2b\alpha\beta}{\{2a(p^2-q^2-1)+4bpq\} - \{a(2(p+1)+q^2)+bq(p-1)\}\alpha - \{a(2(p-1)-q^2)+bq(p+1)\}\beta + 2a\alpha\beta}$$

- I_2 における接線の傾きは、

$$\frac{(p+1)\{b(p+1)-aq\}\alpha - (p-1)\{b(p-1)-aq\}\beta + 2b\alpha\beta}{\{2a(p^2-q^2-1)+4bpq\} + \{a(2(p+1)+q^2)+bq(p-1)\}\alpha + \{a(2(p-1)-q^2)+bq(p+1)\}\beta + 2a\alpha\beta}$$

- I_3 における接線の傾きは、

$$\frac{(p+1)\{b(p+1)-aq\}\alpha + (p-1)\{b(p-1)-aq\}\beta - 2b\alpha\beta}{\{2a(p^2-q^2-1)+4bpq\} + \{a(2(p+1)+q^2)+bq(p-1)\}\alpha - \{a(2(p-1)-q^2)+bq(p+1)\}\beta - 2a\alpha\beta}$$

(脚注 23) $\frac{dy}{dx}$ はもっと美しい形に変形できる信じていろいろ試したが、現時点では為し得なかった。

(脚注 24) y^2 で割った理由は、 $I_0 \sim I_3$ の (分母を有理化する前の) 座標を代入する際の計算の便宜である。例えば I_0 $\left(\frac{2p - \sqrt{(p-1)^2+q^2} + \sqrt{(p+1)^2+q^2}}{2 + \sqrt{(p-1)^2+q^2} + \sqrt{(p+1)^2+q^2}}, \frac{2q}{2 + \sqrt{(p-1)^2+q^2} + \sqrt{(p+1)^2+q^2}} \right)$ に関して、分母・分子を y^2 で割る前の $\frac{dy}{dx}$ の式に x 座標と y 座標を代入する大変さと比較すれば、分母・分子を y^2 で割った後の $\frac{dy}{dx}$ の式に

$$\frac{x}{y} = \frac{2p - \sqrt{(p-1)^2+q^2} + \sqrt{(p+1)^2+q^2}}{2q}, \quad \frac{1}{y} = \frac{2 + \sqrt{(p-1)^2+q^2} + \sqrt{(p+1)^2+q^2}}{2q}$$

を代入する方が、計算が楽である。

(脚注 25) 動点 $P(p, q)$ が直線 ℓ 上を動くという仮定から、 $M = aq - bp$ が成り立つ。これを用いて M を消去した。

(脚注 26) 分母があまりに長い式になったため、やむなく、便宜的に α 、 β と置換した。ただし、この置換はこの節だけのものとし、他では $\sqrt{(p-1)^2+q^2}$ 、 $\sqrt{(p+1)^2+q^2}$ をそのまま表記している。

(脚注 27) ちなみに、 α は辺 PA の長さ、 β は辺 PB の長さを表している。

§2 4点 I_0, I_1, I_2, I_3 がクラインの4元群をなすこと

動点 P が直線 l 上を動くときの $I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} について、「動点 P が曲線 \mathcal{E} 上にあるとき、4点 I_0, I_1, I_2, I_3 は、(楕円曲線上の点の加法に関して) クラインの4元群をなす」という予想を、前稿の §3 で“直線 l が辺 AB の中点を通る場合”に限定して述べた。

しかし、本稿の §1 にて、「動点 P が“任意の直線 l ”上を動く場合」の $I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} を求めることができたので、この予想も、次のように一般化して考察する。

予想

$\vec{v} = (a, b) \neq \vec{0}$ とし、 \vec{v} に平行で点 (c, d) を通る直線を l とする。

また、動点 P が直線 l 上を動くときの $I_0 \sim I_3$ の軌跡を \mathcal{E} とする。

\mathcal{E} が楕円曲線であり、動点 P が曲線 \mathcal{E} 上にあるあるとき、4点 I_0, I_1, I_2, I_3 は、(楕円曲線上の点の加法に関して) クラインの4元群をなす。

内心・傍心の定義から、「3点 I_0, I_1, A 」, 「3点 I_0, I_2, B 」, 「3点 I_0, I_3, P 」, 「3点 I_1, I_2, P 」, 「3点 I_2, I_3, A 」, 「3点 I_3, I_1, B 」は、それぞれ同一直線上にある。

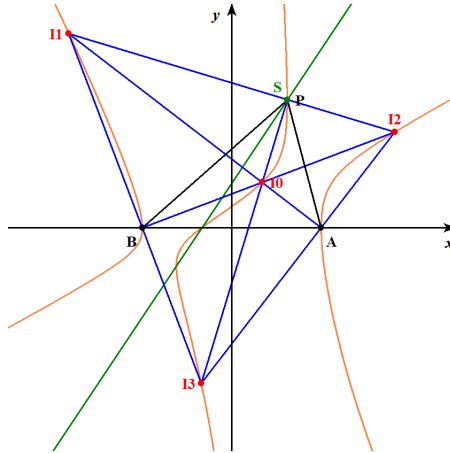


図11 「 I_0, I_1, A 」, 「 I_0, I_2, B 」, 「 I_0, I_3, S 」, 「 I_1, I_2, S 」, 「 I_2, I_3, A 」, 「 I_3, I_1, B 」は同一直線上

したがって、動点 P が曲線 \mathcal{E} 上にあるとき、 $I_0 \sim I_3$ のどれか一つ、例えば I_0 を(楕円曲線上の点の加法に関する)単位元とすると(脚注 28)、次の演算結果が直ちに得られる。

(脚注 28) 前稿にも書いたが、単位元は I_0 でなくても、 I_1 でも I_2 でも I_3 でも構わない。

$$I_1 + I_2 = I_3, \quad I_2 + I_3 = I_1, \quad I_3 + I_1 = I_2$$

また、 I_0 が単位元であることから、次の演算結果も自明である。

$$I_0 + I_0 = I_0, \quad I_1 + I_0 = I_1, \quad I_2 + I_0 = I_2, \quad I_3 + I_0 = I_3$$

よって、4点 I_0, I_1, I_2, I_3 が、クラインの4元群をなすためには、右の表の3ヶ所の空欄がすべて I_0 であること、すなわち

+	I_0	I_1	I_2	I_3
I_0	I_0	I_1	I_2	I_3
I_1	I_1		I_3	I_2
I_2	I_2	I_3		I_1
I_3	I_3	I_2	I_1	

$$I_1 + I_1 = I_0, \quad I_2 + I_2 = I_0, \quad I_3 + I_3 = I_0$$

であることを示せば良い。そしてこれは

4点 I_0, I_1, I_2, I_3 の接線すべてが曲線 \mathcal{E} 上の1点で交わること

と同値である (脚注 29)。

* * *

このあと、

§ 2.1 直線 l が直線 AB と垂直でも平行でもない場合 ($a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ の場合)

§ 2.2 直線 l が直線 AB と平行である場合 ($b = 0$ の場合)

§ 2.3 直線 l が直線 AB と垂直である場合 ($a = 0$ の場合)

のそれぞれにおいて「4点 I_0, I_1, I_2, I_3 の接線すべてが曲線 \mathcal{E} 上の1点で交わること」を確認していく (脚注 30)。

(脚注 29) もっと端的に言えば、「曲線 \mathcal{E} と4本の接線が1点で交わること」である。

(脚注 30) なお、クラインの4元群の成立には直接関係しないが、実は、さらに直線 l も同じ点で交わる。(つまり、「曲線 \mathcal{E} 」, 「直線 l 」, および「4本の接線」が、1点で交わるのである。) この事実は、およびにて具体例で確認できる。

§ 2.1 直線 l が直線 AB と垂直でも平行でもない場合

直線 l が直線 AB と垂直でも平行でもないのは、 $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ の場合である。この場合の、直線 l と曲線 \mathcal{E} との交点を求める。

ただし、曲線 \mathcal{E} が楕円曲線である場合を考えるため、 $b^2 - M^2 \neq 0$ (脚注 31)、すなわち $M \neq \pm b$ とする。

$$\text{直線 } l \text{ の媒介変数表示 } \begin{cases} x = at + c \\ y = bt + d \end{cases} \text{ を曲線 } \mathcal{E} \text{ の式}$$

$$bx(x^2 - y^2 - 1) - 2ay(x^2 - 1) + M(x^2 + y^2 - 1) = 0 \quad \dots \textcircled{\ast}$$

(ただし $M = ad - bc$) に代入して整理すると、

$$ab(a^2 + b^2)t^3 + (ad + 2bc)(a^2 + b^2)t^2 + (2a^2cd + 4b^2cd + abc^2 - abd^2 - ad)t + (ac^2d + 2bcd^2 - ad^3 - ad) = 0 \quad \dots \textcircled{\ast}$$

という形の t についての方程式が得られる。 $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のとき、この方程式 $\textcircled{\ast}$ は t に関する 3 次方程式である。

ところで、この方程式 $\textcircled{\ast}$ は、 $a \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{a}(bt + d) \left\{ \sqrt{a^2 + b^2}(at + c) - \sqrt{a^2 + M^2} \right\} \left\{ \sqrt{a^2 + b^2}(at + c) + \sqrt{a^2 + M^2} \right\} = 0$$

と実数の範囲で因数分解できる (脚注 32)。したがって、 $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のとき、直線 l 上を動く点 P が曲線 \mathcal{E} 上にあるのは

$$t = -\frac{d}{b}, \quad -\frac{c}{a} + \frac{\sqrt{a^2 + M^2}}{a\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad -\frac{c}{a} - \frac{\sqrt{a^2 + M^2}}{a\sqrt{a^2 + b^2}}$$

のときである。これらの値から求まる共有点を順に C, S, T とすると、

$$\begin{aligned} C & \left(-\frac{M}{b}, 0 \right) \\ S & \left(\frac{\sqrt{a^2 + M^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{M}{a} + \frac{b\sqrt{a^2 + M^2}}{a\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ T & \left(-\frac{\sqrt{a^2 + M^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{M}{a} - \frac{b\sqrt{a^2 + M^2}}{a\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \end{aligned}$$

となる (脚注 33) (脚注 34)。

(脚注 31) § 1.4 より。

(脚注 32) この因数分解は、決して易しくはない。

(脚注 33) $M \neq \pm b$ ならば、 C, S, T はそれぞれ相異なる 3 点である。($M = -b$ の場合は点 C と点 S が一致してしまう。また、 $M = -b$ の場合は点 T は直線 l と直線 $x + 1 = 0$ (§ 1.4 の【 a 】の直線 $[a-3]'$) との交点となるが、直線 $x + 1 = 0$ は $I_0 \sim I_3$ の軌跡ではない。 $M = b$ の場合も同様。))

(脚注 34) 線分 ST の中点は $\left(0, \frac{M}{a} \right)$ だが、これは直線 l と y 軸との交点である。つまり、直線 l と y 軸の交点を D

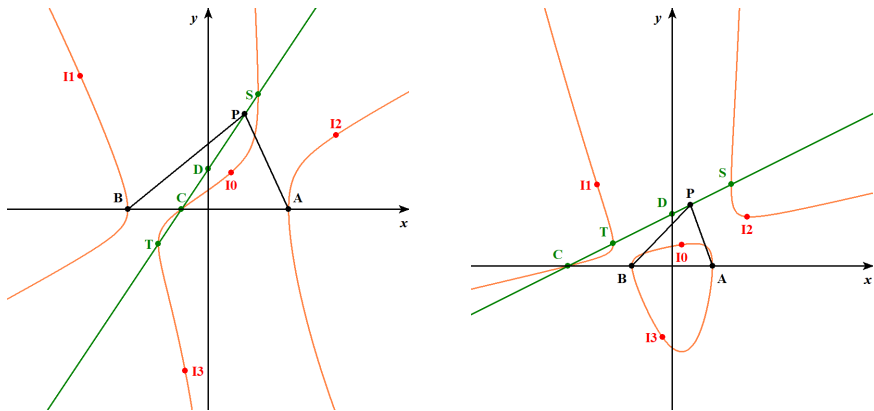


図 12 直線 l と曲線 \mathcal{E} の交点 C, S, T , および直線 l と y 軸との交点 D

動点 P が曲線 \mathcal{E} 上にあるのは、「動点 P が点 S と一致する場合」と「動点 P が点 T と一致する場合」の 2 つのシチュエーションが考えられる^(脚注 35)。しかし、計算は一部の プラスマイナス 正負が異なるだけであるから、ここでは「動点 P が点 S と一致する場合」についてのみ計算を行うことにする。

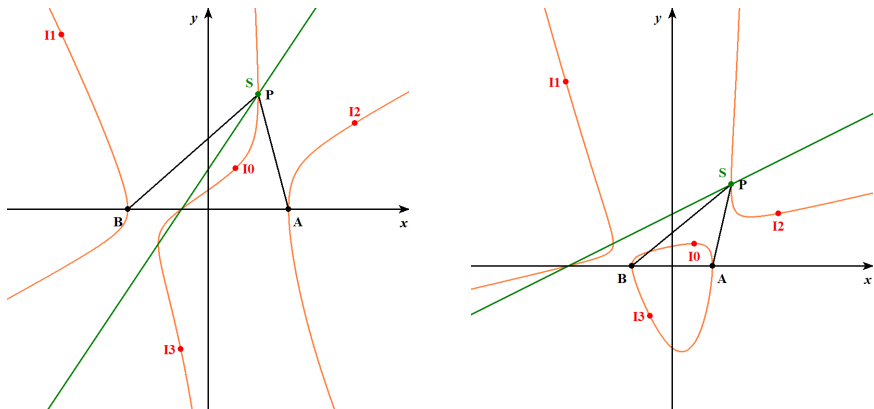


図 13 動点 P が点 S と一致するとき

動点 P が点 S $\left(\frac{\sqrt{a^2 + M^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{M}{a} + \frac{b\sqrt{a^2 + M^2}}{a\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ と一致する場合、

$$p = \frac{\sqrt{a^2 + M^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad q = \frac{M}{a} + \frac{b\sqrt{a^2 + M^2}}{a\sqrt{a^2 + b^2}}$$

としたとき、2 点 S, T は点 D に関して対称な位置にある。

これはまったく自明なことではなく、私は、 S, T の座標を算出するまで気付かなかった。気付いたあと、改めて図 12 を見ると、3 点 S, T, D は確かにそのような位置関係にあることが確認できる。

(脚注 35) 「動点 P が点 C と一致する場合」は、 $\triangle PAB$ が作られないので除外している。

となるので、これを「§ 0.3 で求めておいた $I_0 \sim I_3$ の座標」、および「§ 1.5 で求めておいた接線の傾き」に代入すれば、動点 P が点 S と一致する場合の $I_0 \sim I_3$ の座標および接線の傾きが求まる。

まず、x 座標を（ものすごくがんばって）求めてみたところ、

- I_0 の x 座標は

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2}} \sqrt[4]{\frac{a^2+M^2}{a^2+b^2}} \left(\sqrt{(bM+a^2) + \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+M^2)}} - \sqrt{(bM-a^2) + \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+M^2)}} \right)$$
- I_1 の x 座標は

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2}} \sqrt[4]{\frac{a^2+M^2}{a^2+b^2}} \left(-\sqrt{(bM+a^2) + \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+M^2)}} - \sqrt{(bM-a^2) + \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+M^2)}} \right)$$
- I_2 の x 座標は

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2}} \sqrt[4]{\frac{a^2+M^2}{a^2+b^2}} \left(\sqrt{(bM+a^2) + \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+M^2)}} + \sqrt{(bM-a^2) + \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+M^2)}} \right)$$
- I_3 の x 座標は

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2}} \sqrt[4]{\frac{a^2+M^2}{a^2+b^2}} \left(-\sqrt{(bM+a^2) + \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+M^2)}} + \sqrt{(bM-a^2) + \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+M^2)}} \right)$$

となった。

同様にして「 $I_0 \sim I_3$ の y 座標」と「接線の傾き」も求めれば、接線の式が求まり、それが求まれば交点も求まる。

しかし、その計算過程はあまりに険しく、私は I_0 の y 座標を求める過程で力尽きた。そして、もし仮に、もう少しがんばって I_0 の y 座標を導くことができたとしても、次に接線の傾きを求め、それを利用して接線の式を求め、それを利用して交点の座標を求めるところまで到達できるとは、とても思えない。残念ながら、代数計算によって証明しようと考えていた私の目論見は、ここで暗礁に乗り上げてしまった。^(脚注 36)

現時点において、私は前述の「予想」を証明できていない。しかし、それらを文字式で表すことができなくても、さまざまな直線 l に対する軌跡 \mathcal{E} および $I_0 \sim I_3$ における接線をコンピュータで描くことによって、予想がいつでも成り立っていることを目で確認することができる^(脚注 37)。

^(脚注 36) 代数計算によらない方法にも思いを巡らせたが、残念ながら解決策が思いつかない。また、代数計算による効率的な方法があるのに、私が気付いていないだけという可能性もある。

^(脚注 37) もちろん、図を描いて「そう見える」ということでは、証明とは言えない。ただ、さまざまなシチュエーションで「たまたまそう見える」という偶然が例外なく起こり続けることなどあり得ないので、私はこの予想が正しいことを確信している。

§ 2.1 の例 1 直線 l が辺 AB 上で交わるとき

動点 P が点 S と一致する場合は、4本の接線は点 T で交わる。



図 14 動点 P が点 S と一致するときの 4本の接線

また、動点 P が点 T と一致する場合は、4本の接線は点 S で交わる。

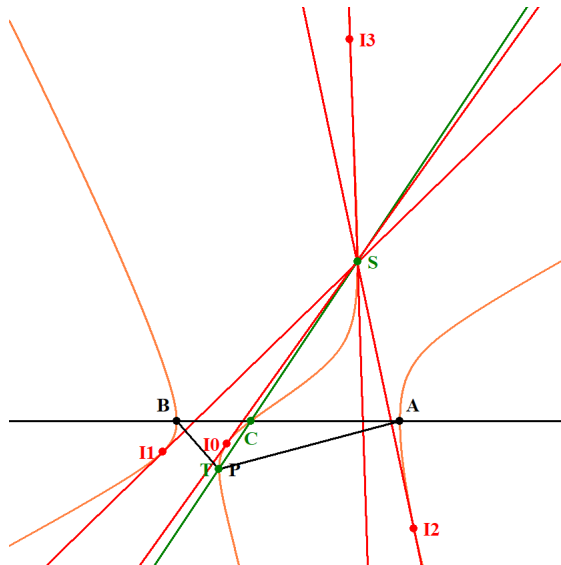


図 15 動点 P が点 T と一致するときの 4本の接線

§ 2.1 の例 2 直線 l が辺 AB の延長上で交わるとき

動点 P が点 S と一致する場合は、4本の接線は点 T で交わる。

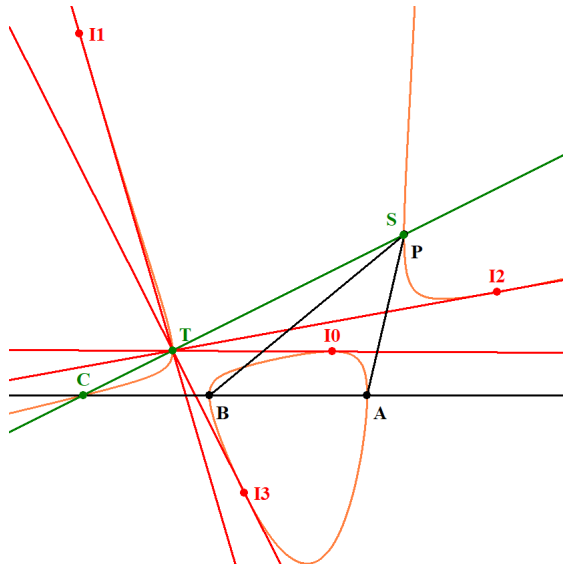


図 16 動点 P が点 S と一致するときの 4本の接線

また、動点 P が点 T と一致する場合は、4本の接線は点 S で交わる。

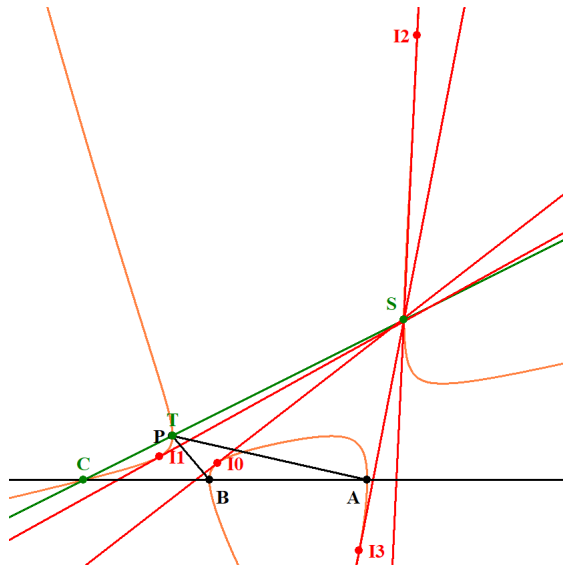


図 17 動点 P が点 T と一致するときの 4本の接線

§ 2.2 直線 l が直線 AB と平行である場合

直線 l が直線 AB と平行になるのは、 $b = 0$ かつ $d \neq 0$ の場合であるので、曲線 \mathcal{E} の式 $\textcircled{5}$ は

$$-2y(x^2-1) + d(x^2+y^2-1) = 0$$

となる (脚注 38)。また、このとき、直線 l は、わざわざ媒介変数表示を用いずに、単に $y = d$ と書ける。

したがって、直線 l 曲線 \mathcal{E} の交点の座標は、連立方程式

$$\begin{cases} -2y(x^2-1) + d(x^2+y^2-1) = 0 \\ y = d \end{cases}$$

を連立して解けば良い。この 2 式から y を消去して整理すると $dx^2 = d(1+d^2)$ 、したがって $d \neq 0$ より

$$x = \sqrt{1+d^2}, \quad -\sqrt{1+d^2}$$

である。すなわち、 $b = 0$ かつ $d \neq 0$ のとき、直線 l と軌跡 \mathcal{E} は異なる 2 個の共有点を持つ。これらの共有点を順に S , T とすると、

$$S(\sqrt{1+d^2}, d), \quad T(-\sqrt{1+d^2}, d)$$

となる。

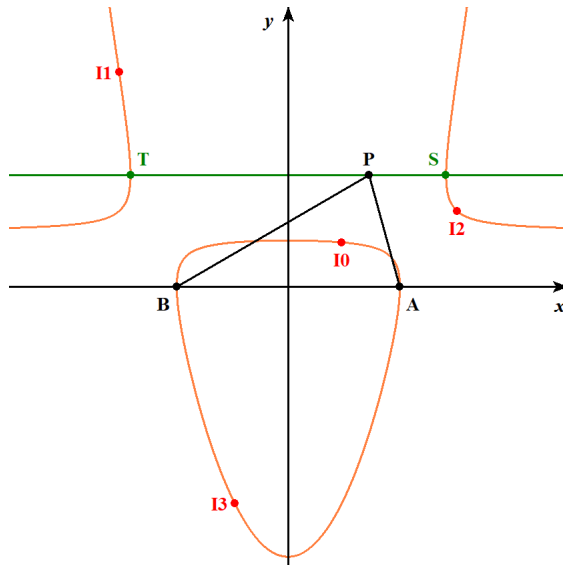


図 18 軌跡 \mathcal{E} と、直線 l と曲線 \mathcal{E} の交点 S, T

(脚注 38) $b = 0$ のとき $M = ad$ であり、これらを式 $\textcircled{5}$ に代入すると $-2ay(x^2-1) + ad(x^2+y^2-1) = 0$ である。ここで、 $b = 0$ と $\vec{v} = (a, b) \neq (0, 0)$ より $a \neq 0$ であるから、両辺を a で割ることができて、この式となる。

動点 P が曲線 \mathcal{E} 上にあるのは、「動点 P が点 S と一致する場合」と「動点 P が点 T と一致する場合」の 2 つのシチュエーションが考えられる。しかし、2 点 S, T が y 軸に関して対称となっていることは一目瞭然であるから、ここでは「動点 P が点 S と一致する場合」についてのみ計算を行うことにする。

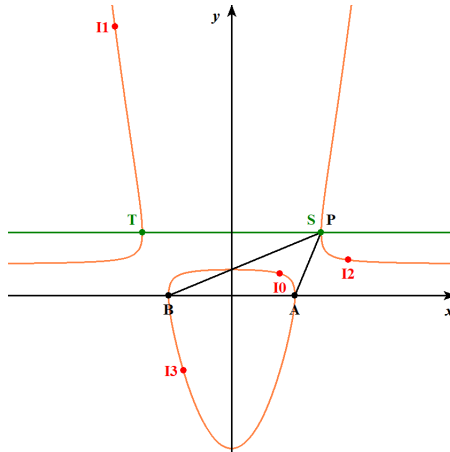


図 19 動点 P が点 S と一致するとき

動点 P が点 $S(\sqrt{1+d^2}, d)$ と一致する場合,

$$p = \sqrt{1+d^2}, \quad q = d$$

となるので、これを「§ 0.3 で求めておいた $I_0 \sim I_3$ の座標」、および「§ 1.5 で求めておいた接線の傾き」に代入すれば、動点 P が点 S と一致する場合の $I_0 \sim I_3$ の座標および接線の傾きが求まる。

まず x 座標を求めてみたところ、

- I_0 の x 座標は $\frac{\sqrt[4]{1+d^2}}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 + \sqrt{1+d^2}} - \sqrt{-1 + \sqrt{1+d^2}} \right)$
- I_1 の x 座標は $\frac{\sqrt[4]{1+d^2}}{\sqrt{2}} \left(-\sqrt{1 + \sqrt{1+d^2}} - \sqrt{-1 + \sqrt{1+d^2}} \right)$
- I_2 の x 座標は $\frac{\sqrt[4]{1+d^2}}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 + \sqrt{1+d^2}} + \sqrt{-1 + \sqrt{1+d^2}} \right)$
- I_3 の x 座標は $\frac{\sqrt[4]{1+d^2}}{\sqrt{2}} \left(-\sqrt{1 + \sqrt{1+d^2}} + \sqrt{-1 + \sqrt{1+d^2}} \right)$

となった (脚注 39)。

同様に $I_0 \sim I_3$ の y 座標も求めたところ、

(脚注 39) 実はこれは、§ 2.1 で求めた $I_0 \sim I_3$ の x 座標に $b = 0$ を代入したものと同じである。つまり、結果として、§ 2.1 と § 2.2 は一つにまとめることができる。

- I_0 の y 座標は $\frac{\left(\sqrt[4]{4(1+d^2)} - \sqrt{1+\sqrt{1+d^2}}\right)\left(-\sqrt[4]{4(1+d^2)} - \sqrt{-1+\sqrt{1+d^2}}\right) + d}{2}$
- I_1 の y 座標は $\frac{\left(-\sqrt[4]{4(1+d^2)} - \sqrt{1+\sqrt{1+d^2}}\right)\left(-\sqrt[4]{4(1+d^2)} - \sqrt{-1+\sqrt{1+d^2}}\right) + d}{2}$
- I_2 の y 座標は $\frac{\left(\sqrt[4]{4(1+d^2)} - \sqrt{1+\sqrt{1+d^2}}\right)\left(\sqrt[4]{4(1+d^2)} - \sqrt{-1+\sqrt{1+d^2}}\right) + d}{2}$
- I_3 の y 座標は $\frac{\left(-\sqrt[4]{4(1+d^2)} - \sqrt{1+\sqrt{1+d^2}}\right)\left(\sqrt[4]{4(1+d^2)} - \sqrt{-1+\sqrt{1+d^2}}\right) + d}{2}$

となった (脚注 40)。

§2.1 では $I_0 \sim I_3$ の y 座標を求める過程で力尽きたが、今回はなんとか y 座標を求めることができた。同様にして「接線の傾き」も求めれば、接線の式が求まり、それが求まれば交点も求まる。

しかし、その道のりは、あまりに険しすぎる。

まったく不本意ではあるが、ここでもまた §2.1 同様、軌跡 \mathcal{E} および $I_0 \sim I_3$ における接線をコンピュータで描くことによって、予想が成り立っていることを目で確認するにとどめることにする。

§2.2 の例

動点 P が点 S と一致する場合は、4本の接線は点 T で交わる。

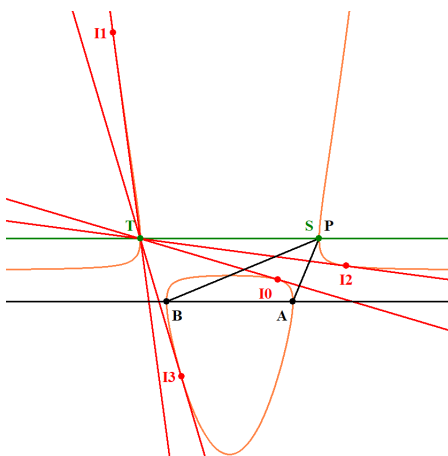


図 20 動点 P が点 S と一致するときの 4 本の接線

(脚注 40) y 座標も x 座標と同様に、§2.1 における y 座標に $b = 0$ を代入したものと同一になるはずである。(すなわち、§2.1 と §2.2 を一つにまとめることができるはずである。)

§ 2.3 直線 l が直線 AB と垂直である場合

直線 l が直線 AB と直交するのは、 $a = 0$ の場合であるので、曲線 \mathcal{E} の式⑩は

$$x(x^2 - y^2 - 1) - c(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

となる (脚注 41)。

ただし、曲線 \mathcal{E} が楕円曲線である場合を考えるため、 $c \neq -1, 0, 1$ とする (脚注 42)。

また、このとき、直線 l は、わざわざ媒介変数表示を用いずに、単に $x = c$ と書ける。

したがって、直線 l 曲線 \mathcal{E} の交点の座標は、連立方程式

$$\begin{cases} x(x^2 - y^2 - 1) - c(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ x = c \end{cases}$$

を連立して解けば良い。この 2 式から x を消去して整理すると $cy^2 = 0$ 、したがって $c \neq 0$ より

$$y = 0 \quad (\text{重解})$$

である。すなわち、 $a = 0$ のとき、直線 l と軌跡 \mathcal{E} は 1 個の共有点を持つ。この共有点を C とすると、 C の座標は $(c, 0)$ である。

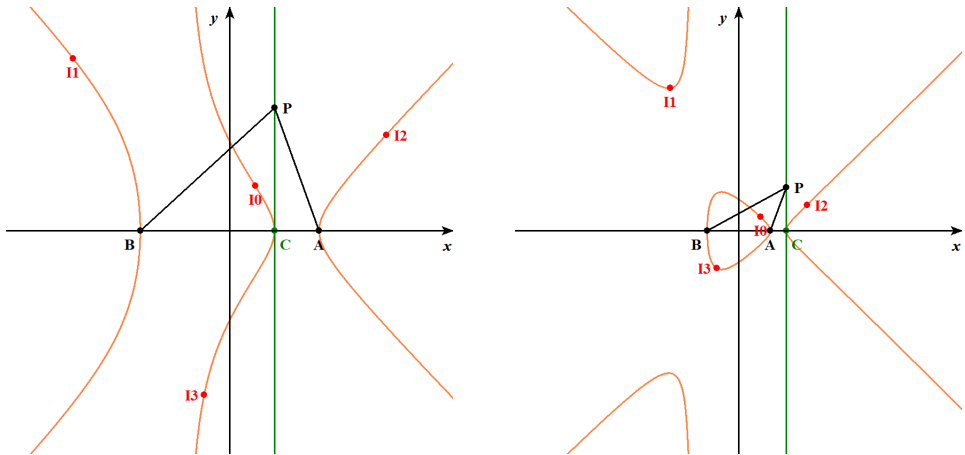


図 21 軌跡 \mathcal{E} と、直線 l と曲線 \mathcal{E} の交点 C

動点 P が曲線 \mathcal{E} 上にあるのは「動点 P が点 C と一致する場合」であるが、このとき、 $\triangle PAB$ は作られない。したがって、 $a = 0$ のときに関しては、考察することが何もない。

(脚注 41) $a = 0$ のとき $M = -bc$ であり、これらを式⑩に代入すると $bx(x^2 - y^2 - 1) - bc(x^2 + y^2 - 1) = 0$ である。ここで、 $a = 0$ と $\vec{v} = (a, b) \neq (0, 0)$ より $b \neq 0$ であるから、両辺を b で割ることができて、この式となる。

(脚注 42) 前稿 §3 より。(もしくは本稿 §1.3 より。)

あとがき

§ 2.1 および § 2.2 にて、代数計算による証明を完遂させられなかったことは、残念に思う。しかし、§ 0.3 で求めた「 $I_0 \sim I_3$ の座標」も、§ 1.5 で求めた「接線の傾き」も、“任意の点 $P(p, q)$ ” に対してさえ複雑であるのに、「これらの p と q に文字式を代入し、その座標と傾きを利用して接線の方程式を求め、それらを連立して交点を求める」という計算を最後までやり遂げることは、現実問題として可能とは思えなかった。

もちろん、他の手段もいろいろ考え、試行錯誤した。実際のところ、本稿で出てきた計算には、一筋縄ではいかないものが少なからずあった。“先に答えを想像しないと正解に辿り着けない逆説的な問い掛けになっている。”は映画『シン・ゴジラ』にて塚本晋也氏が演じた間邦夫の台詞であるが、本稿の数ヶ所で、「こうなるはずだ」と推定したゴール側からアプローチして式変形をおこなった。当然、接線の方程式を求めようとする際にも同様のアプローチを試みたのだが、これについては、ゴールには至らなかった。

イギリスの物理学者ポール・ディラック (Paul Adrien Maurice Dirac, 1902—1984) が遺した “**Physical laws should have mathematical beauty.** (物理法則は、数学的に美しくなければならない。)” という言葉がある。私が今回調べたことは Physical laws (物理法則) ではないが、「動点 P が曲線 \mathcal{E} 上にあるとき、 $I_0 \sim I_3$ における \mathcal{E} の接線すべてが曲線 \mathcal{E} 上の 1 点で交わる (そして、さらに直線 l も同じ点で交わる)」という美しい性質があるならば、接線の方程式は、美しい式で表されるはずだ。そう信じて、希望を持って挑戦し続けたのだが、残念ながら力が及ばなかった。

* * *

ところで、なぜ私が (証明が未完にもかかわらず) 真であることを確信しているのかと言えば、コンピュータを用いて、代数曲線をディスプレイ上で自由自在に描画できるためである。今回の原稿を書くにあたり、 a, b, c, d それぞれの値を変化させながら、さまざまなシミュレーションのグラフをディスプレイ上で描画した。本稿に掲載した各図は、そのほんの一握りをキャプチャーした画像に過ぎない。たった数枚の図から「常に 1 点で交わる」などと判断してはならないことは言うまでもないが、しかし、 a, b, c, d それぞれの値を小刻みに (あるいは大幅に) いろいろ変化させても、常に 1 点で交わっているように見えるのであれば、それは決して「偶然」ではなく、「必然」に違いない。そう確信できるだけの、十分な量の検証をおこなっている。

コンピュータによる検証は、私の計算ミスを発見することにも大いに貢献した。本稿に掲載した式や座標はすべてこの検証を経ているので、計算結果はすべて正しいはずである。(ただし、打ち間違いはあるかもしれない。)

* * *

本心を言うと、私は、証明を完遂させられなかったことに対して、さほど落ち込んでいない。(もちろん、美しいであろう「接線の方程式」は求めたかったが。)理由は2つあり、そのうちの1つは、前述の通り、コンピュータによる検証によって真であることを既に確信しているからである。そしてもう1つの理由は、こちらが主たる理由なのだが、私は「この命題が正しいことを代数計算によって証明すること」よりも、「このような不思議なことが起こる根源的な原因」の方に、より強く関心を惹かれているからである。

そもそも、

- **[§ 1.3]** 動点 P が直線上を動くとき、 $I_0 \sim I_3$ の軌跡は、なぜ「楕円曲線」になるのか。

が、まったくわからない。今はただ、「計算してみたところ、楕円曲線であることが確認できた」というだけである。 $I_0 \sim I_3$ の軌跡が「優れた代数的構造を持つ曲線になる」ということが、とても不思議である。

他にも、

- **[§ 1.2]** $I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} の「 x 軸に垂直な漸近線」は、なぜ点 C' (点 C と原点に関して対称な点) を通るのか。
- **[§ 2.1]** 2点 S, T は、なぜ点 D に関して対称な位置にあるのか。

など、興味深いことが散在している。これらの根源的な原因を究明したい。

特に、「楕円曲線」に関する知識を、もっと深めたい。ひょっとしたら、「楕円曲線」に関する十分な知識があれば、

- **[§ 2.1, § 2.2]** 動点 P が点 S (または点 T) と一致するとき、 $I_0 \sim I_3$ における曲線 \mathcal{E} の接線は、なぜすべて点 T (または点 S) を通るのか。

という未解決問題を、代数計算を使わないアプローチで解決できるかもしれない。

さらに学習を進め、軌跡 \mathcal{E} の全貌に迫りたい。

* * *

さらには、本稿では一切触れていないが、

- 動点 P が円錐曲線(楕円、放物線、双曲線)上を動くとき、 $I_0 \sim I_3$ はどのような軌跡を描くのか。

ということにも興味がある。現時点ではまったく予測がつかないし、統一的に考察する手段すら思いつかない。どれほど遠い将来になるかわからないが、いつか考察を始める日が来ると信じて、備忘のために記しておく。

参考文献と利用したアプリケーション

§ 1.3 で「 $I_0 \sim I_3$ の軌跡 \mathcal{E} が楕円曲線であること」を検証する際には、次の書籍を参考にした。

[1] “楕円曲線論入門”

著：J. H. シルヴァーマン, J. テイト

翻訳：足立恒雄, 木田雅成, 小松啓一, 田谷久雄

出版：シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995/11

ISBN-13 : 978-4431706830

(その後丸善出版から 2012/8 に再刊行, ISBN-13 : 978-4621064535)

また、本稿で使った画像はすべて、インターネット上で入手できる次のフリーウェアを利用して描いた。

[2] 高機能関数グラフ・図形表示ソフト “**FunctionView**” for Windows XP,Vista,7,8,10

作：和田啓助（元群馬県高等学校教師）

頒布：<http://hp.vector.co.jp/authors/VA017172/>

なお、本稿のために “**FunctionView**” で作成したファイルを、私のプライベートな Web サイト <http://300000.net/> にて公開している。興味（と Windows PC）をお持ちの方は、ぜひ “**FunctionView**” と共にダウンロードしていただき、インタラクティブな描画をお楽しみいただきたい。