円錐曲線の媒介変数表示

参拾萬数学工房

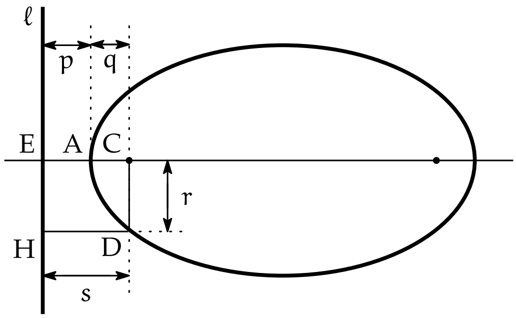
（**https://300000.net/**）

本稿では，xy 平面上の任意の円錐曲線 $F(x,y)=0$ を，「楕円」と「双曲線」と「放物線」の区別をすることなく，また位置や向きに関係なく，すべて同じ手法で媒介変数表示する方法を述べる。

§1　円錐曲線の決定

§1.1　楕円の決定

正円でない楕円において，長軸上にある頂点の 1 つを A とし，2 つの焦点のうち A に近い方の焦点を C，焦点 C と対になる準線を ℓ，準線 ℓ と長軸との交点を E とする。また，C を通り準線 ℓ に平行な直線と楕円との 2 つの交点の 1 つを D とし，D から準線 ℓ に下ろした垂線の足を H とする。



上図のように，$EA=p$，$AC=q$，$CD=r$ (脚注 1)，$EC=DH=s$ とする。この楕円の離心率が e（ただし $0<e<1$）であるとき，定数 p,q,r,s,e に対して，次の関係式が成り立つ。

- $q:p=r:s=e:1$　（∵ 離心率の定義より）
- $s=p+q$　（∵ 上図より明らか）

これらの関係式から，定数 p,q,r,s,e のうちのいずれか 2 つが与えられれば，他のすべてがただ一つに定まることがわかる。

例えば p と q が与えられている場合は，r,s,e はそれぞれ p と q を用いて

$$r=\frac{q}{p}(p+q),\quad s=p+q,\quad e=\frac{q}{p}$$

(脚注 1) r は，楕円の「半直弦」と呼ばれる値である。双曲線（§1.2），放物線（§1.3）についても同様。

と求まる。

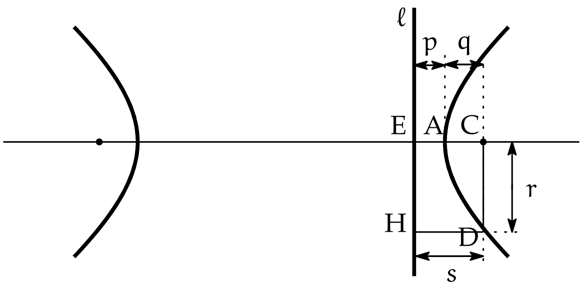
あるいは，例えば r と s が与えられている場合は，p,q,e はそれぞれ r と s を用いて

$$p = \frac{s^2}{r+s}, \quad q = \frac{rs}{r+s}, \quad e = \frac{r}{s}$$

と求まる。

§ 1.2　双曲線の決定

双曲線において，頂点の 1 つを A とし，2 つの焦点のうち A に近い方の焦点を C，焦点 C と対になる準線を ℓ，準線 ℓ と軸との交点を E とする。また，C を通り準線 ℓ に平行な直線と双曲線との 2 つの交点の 1 つを D とし，D から準線 ℓ に下ろした垂線の足を H とする。



上図のように，EA = p，AC = q，CD = r，EC = DH = s とする。この双曲線の離心率が e（ただし $e > 1$）であるとき，定数 p,q,r,s,e に対して，次の関係式が成り立つ。

- $q : p = r : s = e : 1$　（∵ 離心率の定義より）
- $s = p + q$　（∵ 上図より明らか）

これらの関係式から，定数 p,q,r,s,e のうちのいずれか 2 つが与えられれば，他のすべてがただ一つに定まることがわかる。

例えば p と q が与えられている場合は，r,s,e はそれぞれ p と q を用いて

$$r = \frac{q}{p}(p+q), \quad s = p+q, \quad e = \frac{q}{p}$$

と求まる。

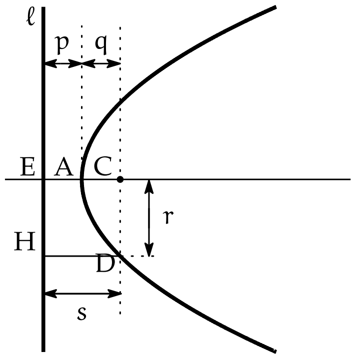
あるいは，例えば r と s が与えられている場合は，p,q,e はそれぞれ r と s を用いて

$$p = \frac{s^2}{r+s}, \quad q = \frac{rs}{r+s}, \quad e = \frac{r}{s}$$

と求まる。

§ 1.3　放物線の決定

放物線において，頂点を A，焦点を C，準線を ℓ，準線 ℓ と軸との交点を E とする。また，C を通り準線 ℓ に平行な直線と放物線との 2 つの交点の 1 つを D とし，D から準線 ℓ に下ろした垂線の足を H とする。



上図のように，$\mathrm{EA} = p$，$\mathrm{AC} = q$，$\mathrm{CD} = r$，$\mathrm{EC} = \mathrm{DH} = s$ とするとき，定数 p,q,r,s に対して，次の関係式が成り立つ。

- $q : p = r : s = 1 : 1$，すなわち $p = q$，$s = r$　（$\because$ 放物線の定義より）
- $s = 2q$　（$\because p + q = s$ と $p = q$ より）

これらの関係式から，定数 p,q,r,s のうちのいずれか 1 つが与えられれば，他のすべてがただ一つに定まることがわかる。

＊　＊　＊

以上，わざわざ「(正円でない) 楕円」「双曲線」「放物線」に分類して述べてきたが，結局のところ，どの場合においても，p,q,r,s,e のうちの 2 つが与えられれば円錐曲線の形状が確定することが確かめられた (脚注 2)。

次節では，定数 r と s を与えて得られる円錐曲線について考察する。

(脚注 2) 放物線の場合は離心率 e が 1 であることが予めわかっている。

§2　円錐曲線の媒介変数表示

§2.1　射影による円の写像としての円錐曲線

2 つの正の定数 r，s が与えられているものとする。

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ 内に直線 ℓ をとり，直線 ℓ との距離が s であるように点 C をとる。また，直線 ℓ と点 C によって定まる平面を α とする。

点 C から直線 ℓ に下ろした垂線の足を E とし（すなわち EC = s である），点 E を通り平面 α に垂直な直線をとる。そして，この直線上に，EL = s となる点 L をとる。

さらに，点 C を中心とする半径 r の円を，直線 ℓ と平行に，かつ平面 α と垂直になるようにおく。この円を X と名付ける。

以上のことを図示すると，次の 図 1 のようになる。

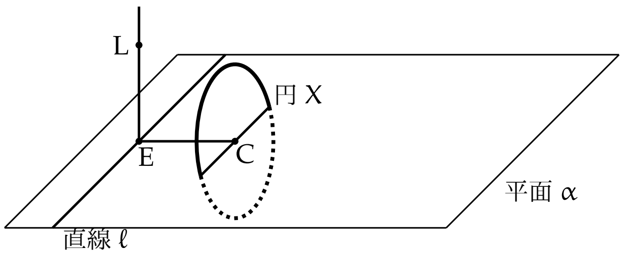


図 1

定理

上のように定めた図形に対して，円 X の周上を動く動点を P とし，直線 LP と平面 α との交点を Q とする。（→ 図 2 ）

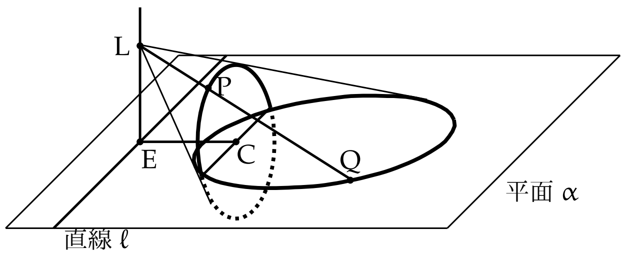


図 2

このとき，動点 P に伴って動く点 Q の軌跡は，点 C を焦点，直線 ℓ を準線とする，離心率 $\dfrac{r}{s}$ の円錐曲線となる。

証明

はじめに，この 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ に，直線 CE を x 軸，直線 ℓ に平行で点 C を通る直線を y 軸，直線 LE に平行で点 C を通る直線を z 軸とする座標系を導入する。ただし，x 軸に関しては E から C に向かう方向を正の向きとし，y 軸の向きは任意で，z 軸はこの 3 軸が右手系をなすように定めるものとする。（→ 図 3 ）

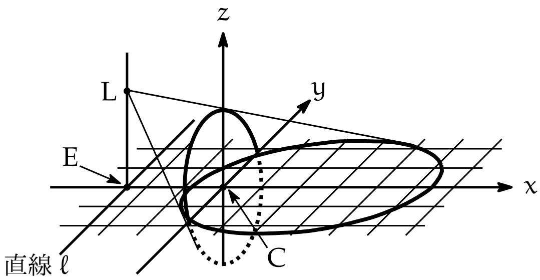


図 3

このとき，平面 α は xy 平面であり，また点 C は $(0,0,0)$，点 E は $(-s,0,0)$，点 L は $(-s,0,s)$ または $(-s,0,-s)$ である（脚注 3）。

さらに，円 X の周上を動く点 P の座標は，媒介変数 θ（$0 \leqq \theta < 2\pi$）を用いて

$$P(0, r\sin\theta, r\cos\theta)$$

と表すことができる（脚注 4）。

$s \neq r\cos\theta$ であるとき（脚注 5），直線 LP と xy 平面との交点 Q の座標は，ちょっとした計算によって

$$Q\left(\frac{r\cos\theta}{1-\frac{r}{s}\cos\theta}, \frac{r\sin\theta}{1-\frac{r}{s}\cos\theta}, 0\right)$$

と求まる。そしてこのとき，

（脚注 3） 点 L の z 座標の正負は，平面 α に y 軸を入れる際の方向の定め方によるとも言えるし，点 L の取り方（点 L を平面 α に対してどちら側にとるか）によるとも言える。なお，点 L の z 座標の正負は，本節の議論にはまったく影響がない。

（脚注 4） ここでは，z 軸の正の向きを始線とする動径 CP の一般角を θ とし，その範囲を $0 \leqq \theta < 2\pi$ に制限した。なお，本節においては動径 CP の回転の向きはどちらでも良いのだが，このあと § 2.2 では，点 L の z 座標が正の場合には「z 軸の正の方向から y 軸の正の方向への回転」を正の向きとし，点 L の z 座標が負の場合にはその逆を正の向きとする。

（脚注 5） 「$s \neq r\cos\theta$ であるとき」とは，ざっくりと言えば「動点 P が点 L と同じ高さにないとき」である。
$s > r$ ならば円 X の周上に $s = r\cos\theta$ を満たす位置はないが，$s = r$ ならば 1 ヶ所，$s < r$ ならば 2 ヶ所，円 X の周上に $s = r\cos\theta$ を満たす位置が存在する。
そして，点 P がその位置にあるとき，直線 LP は xy 平面と交わらない。

- 2 点 $C(0,0,0)$, $Q\left(\dfrac{r\cos\theta}{1-\frac{r}{s}\cos\theta}, \dfrac{r\sin\theta}{1-\frac{r}{s}\cos\theta}, 0\right)$ 間の距離は，

$$\begin{aligned} CQ &= \sqrt{\left(\frac{r\cos\theta}{1-\frac{r}{s}\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{r\sin\theta}{1-\frac{r}{s}\cos\theta}\right)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{r}{1-\frac{r}{s}\cos\theta}\right)^2 \cdot \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)} \\ &= \left|\frac{r}{1-\frac{r}{s}\cos\theta}\right| = \frac{r}{\left|1-\frac{r}{s}\cos\theta\right|} \end{aligned}$$

- 点 Q と直線 ℓ（y 軸）との距離を d とすると，

$$\begin{aligned} d &= \left|\frac{r\cos\theta}{1-\frac{r}{s}\cos\theta} - (-s)\right| \\ &= \left|\frac{s}{1-\frac{r}{s}\cos\theta}\right| = \frac{s}{\left|1-\frac{r}{s}\cos\theta\right|} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} CQ : d &= \frac{r}{\left|1-\frac{r}{s}\cos\theta\right|} : \frac{s}{\left|1-\frac{r}{s}\cos\theta\right|} \\ &= r : s \end{aligned}$$

ここで，r と s は定数であるから，媒介変数 θ の値によらず（すなわち動点 P の位置によらず），比 $CQ : d$ は一定である。

したがって，点 Q の軌跡は，点 C を焦点，直線 ℓ を準線とする円錐曲線であり，その離心率は $\dfrac{r}{s}$ である。（証明終）

次に，この図形における $s \to \infty$ とした場合の極限を考える。

このとき，$LE = EC = s$ と $\angle LEC = \dfrac{\pi}{2}$ より，$\angle LCE = \dfrac{\pi}{4}$（一定）である。したがって，$s \to \infty$ とした場合，直線 LP は「xz 平面上にある，x 軸とのなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ となる直線」となり，このとき交点 Q の軌跡は「半径 r の円」になる。

また，$s \to \infty$ としたときの点 Q の極限は，

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty} Q &= \lim_{s\to\infty} \left(\frac{r\cos\theta}{1-\frac{r}{s}\cos\theta}, \frac{r\sin\theta}{1-\frac{r}{s}\cos\theta}, 0\right) \\ &= (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \end{aligned}$$

となる。この座標が「xy 平面上の原点 O を中心とする半径 r の円」の媒介変数表示を与えることは，一目瞭然であろう。

したがって，$s \to \infty$ の場合まで考えることにすれば，この手法によって（正円の場合も含めて）任意の円錐曲線をつくることができることがわかった。

＊　＊　＊

ところで，この定理の証明で導入した座標系は，あくまでも証明が容易となるように設定したに過ぎず，この定理自体は座標系のとり方によらず成り立つ。したがって，3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ 内のどのような位置に点 C と直線 ℓ があったとしても，同様に平面 α，円 X，および点 L を設定することによって，「点 C を焦点，直線 ℓ を準線とする離心率 $\frac{r}{s}$ の円錐曲線」および「点 C を中心とする半径 r の円」を，平面 α 上に描くことができる。

§ 2.2　円錐曲線の極方程式との関係

前節 § 2.1 で考えた図形における線分 CQ の長さ $\dfrac{r}{\left|1-\frac{r}{s}\cos\theta\right|}$ は，r,s と離心率 e との関係式 $r=es$ を利用して

$$\mathrm{CQ}=\frac{es}{|1-e\cos\theta|}\quad\cdots①$$

と表すことができる。この形は，円錐曲線の極方程式

$$r=\frac{ea}{1-e\cos\theta}\quad\cdots②$$

と酷似している（脚注 6）。本節では，この 2 者の関係について簡単に述べる。

まず，①式の s と②式の a は，文字が違うだけで同じものを表している。したがって，①式と②式の違いは，右辺の分母の絶対値の有無のみである。

そして，この違いは，①式の左辺 CQ が 0 以上であることに対して，②式の左辺 r は負の値も考えることによる。

したがって，この 2 者は，実質的に同じものであると言える。

＊　＊　＊

以上のことから，極方程式 $r=\dfrac{es}{1-e\cos\theta}$ で表される円錐曲線上の点 $\mathrm{Q}(r,\theta)$ を xy 座標に直すと，

$$\mathrm{Q}\left(\frac{es\cos\theta}{1-e\cos\theta},\frac{es\sin\theta}{1-e\cos\theta}\right)$$

となることがわかる。

（脚注 6）高校の教科書には $r=\dfrac{ea}{1+e\cos\theta}$ と掲載されていることもあるが，これは極形式における角 θ の始線のとり方による違いに過ぎず，一方の θ を $\theta+\pi$ と置換すれば他方に一致する。

§ 2.3　xy 平面上の円錐曲線の媒介変数表示

前節 § 2.2 の最後で言及した通り，極方程式 $r = \dfrac{es}{1 - e\cos\theta}$ で表される円錐曲線上の点 Q の座標は

$$Q\left(\frac{es\cos\theta}{1-e\cos\theta}, \frac{es\sin\theta}{1-e\cos\theta}\right)$$

であるから，この円錐曲線は

$$\begin{cases} x &= \dfrac{es\cos\theta}{1-e\cos\theta} \\ y &= \dfrac{es\sin\theta}{1-e\cos\theta} \end{cases} \qquad \cdots\cdots③$$

と媒介変数表示できることがわかる。

そして，xy 平面上の任意の円錐曲線（ただし正円を除く）は，この形の円錐曲線に「適切な回転移動」と「適切な平行移動」を施すことによって得られる。

すなわち，媒介変数表示③にその移動を表す変換を施すことによって，xy 平面上の任意の円錐曲線（ただし正円を除く）の媒介変数表示を得ることができる。

$\boxed{\text{例 } \mathbf{1}}$

「点 $C\left(-\dfrac{4}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ を焦点，直線 $\ell : 2x + y + 8\sqrt{5} = 0$ を準線とする，離心率 $\dfrac{1}{2}$ の楕円」を F_1 とする。この楕円の方程式は

$$16x^2 - 4xy + 19y^2 - 240 = 0$$

である (脚注 7)。

さて，楕円 F_1 の媒介変数表示を求めよう。

§ 1.1 における点 A,E の座標と定数 p,q,r,s,e は，ちょっとした計算によって，それぞれ

(脚注 7) 楕円 F_1 上の点 Q を (x, y) とするとき，CQ の長さは $CQ = \sqrt{\left(x + \dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(y + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$ である。

また，点 Q と直線 $2x + y + 8\sqrt{5} = 0$ との距離を d とすると，$d = \dfrac{\left|2x + y + 8\sqrt{5}\right|}{\sqrt{5}}$ である。

ここで，離心率 $e = \dfrac{1}{2}$ より $CQ : d = 1 : 2$ であるから，

$$2 \cdot \sqrt{\left(x + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{\left|2x + y + 8\sqrt{5}\right|}{\sqrt{5}}$$

これを整理すると $16x^2 - 4xy + 19y^2 - 240 = 0$ が得られる。

ちなみに，楕円 F_1 は，楕円 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$ を原点を中心として角 $+\varphi$ だけ回転移動したものである（ただし φ は $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ を満たす角）。

$$\mathrm{A}\left(-\frac{8}{\sqrt{5}},\ -\frac{4}{\sqrt{5}}\right),\quad \mathrm{E}\left(-\frac{16}{\sqrt{5}},\ -\frac{8}{\sqrt{5}}\right),$$
$$p=4,\quad q=2,\quad r=3,\quad s=6,\quad e=\frac{1}{2}$$

と求まる[脚注 8]。

このあと，§2.1 と同じように円 X と点 L を定めて，点 Q の軌跡として媒介変数表示を求めることもできる。しかし，それは手間がかかるので，ここでは平行移動と回転移動を利用する。

まず，焦点 $\mathrm{C}\left(-\frac{4}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ を原点 $\mathrm{O}(0,0)$ に移すために，x 軸方向に $+\frac{4}{\sqrt{5}}$，y 軸方向に $+\frac{2}{\sqrt{5}}$ だけ平行移動する。次に，準線 $\ell : 2x+y+8\sqrt{5}=0$ を y 軸と平行にするために，$\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$ を満たす角を φ として，原点を中心に $-\varphi$ だけ回転移動する[脚注 9]。この「移動後の楕円」は

$$\begin{cases} x &= \dfrac{6\cos\theta}{2-\cos\theta} \\ y &= \dfrac{6\sin\theta}{2-\cos\theta} \end{cases}$$

と媒介変数表示することができる。

今度は，これをもとの楕円 F_1 に戻す。まず原点を中心に $+\varphi$ だけ回転移動すると，

$$\begin{cases} x &= \cos\varphi\cdot\dfrac{6\cos\theta}{2-\cos\theta}-\sin\varphi\cdot\dfrac{6\sin\theta}{2-\cos\theta} \\ y &= \sin\varphi\cdot\dfrac{6\cos\theta}{2-\cos\theta}+\cos\varphi\cdot\dfrac{6\sin\theta}{2-\cos\theta} \end{cases}$$

ここで，$\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$ であるから

$$\begin{cases} x &= \dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{6\cos\theta}{2-\cos\theta}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{6\sin\theta}{2-\cos\theta} \\ y &= \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{6\cos\theta}{2-\cos\theta}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{6\sin\theta}{2-\cos\theta} \end{cases}$$

となる。次に，x 軸方向に $-\frac{4}{\sqrt{5}}$，y 軸方向に $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ だけ平行移動すると

$$\begin{cases} x &= \dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{6\cos\theta}{2-\cos\theta}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{6\sin\theta}{2-\cos\theta}-\dfrac{4}{\sqrt{5}} \\ y &= \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{6\cos\theta}{2-\cos\theta}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{6\sin\theta}{2-\cos\theta}-\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

(脚注 8) これらを求める方法・手順はいろいろ考えられるので，ここでは割愛する。

(脚注 9) 直線 ℓ の法線ベクトルのうち，長さが 1 であるものとして $\vec{v}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ をとると，角 φ とは $\vec{v}$ と x 軸の正の方向とのなす角である。原点を中心に $-\varphi$ だけ回転すると $\vec{v}$ は x 軸の正の方向に重なり，直線 ℓ は y 軸と平行になる。

これが，楕円 F_1，すなわち楕円 $16x^2-4xy+19y^2-240=0$ の媒介変数表示である。

（例 1 終）

例 2

「点 C (4，1) を焦点，直線 $\ell: x+y-3=0$ を準線とする，離心率 $\sqrt{2}$ の双曲線」を F_2 とする。この双曲線の方程式は

$$xy+x-2y-4=0$$

である（脚注 10）。

さて，双曲線 F_2 の媒介変数表示を求めよう。

§1.2 における点 A,E の座標と定数 p,q,r,s,e は，ちょっとした計算によって，それぞれ

$$A(3,\ 0),\quad E(2,\ -1),$$
$$p=2-\sqrt{2},\quad q=2\sqrt{2}-2,\quad r=2,\quad s=\sqrt{2},\quad e=\sqrt{2}$$

と求まる（脚注 11）。

このあと，§2.1 と同じように円 X と点 L を定めて，点 Q の軌跡として媒介変数表示を求めることもできる。しかし，それは手間がかかるので，ここでは平行移動と回転移動を利用する。

まず，焦点 C (4，1) を原点 O(0,0) に移すために，x 軸方向に -4，y 軸方向に -1 だけ平行移動する。次に，準線 $\ell: x+y-3=0$ を y 軸と平行にするために，$\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす角を φ として，原点を中心に $-\varphi$ だけ回転移動する（脚注 12）。この

（脚注 10） 双曲線 F_2 上の点 Q を (x,y) とするとき，CQ の長さは $CQ=\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}$ である。
また，点 Q と直線 $x+y-3=0$ との距離を d とすると，$d=\dfrac{|x+y-3|}{\sqrt{2}}$ である。
ここで，離心率 $e=\sqrt{2}$ より $CQ:d=\sqrt{2}:1$ であるから，

$$\cdot\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=\sqrt{2}\cdot\frac{|x+y-3|}{\sqrt{2}}$$

これを整理すると $xy+x-2y-4=0$ が得られる。
ちなみに，双曲線 F_2 は，反比例 $y=\dfrac{2}{x}$ のグラフである直角双曲線を x 軸方向に $+2$，y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。

（脚注 11） これらを求める方法・手順はいろいろ考えられるので，ここでは割愛する。

（脚注 12） 直線 ℓ の法線ベクトルのうち，長さが 1 であるものとして $\vec{v}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ をとると，角 φ とは $\vec{v}$ と x 軸の正の方向とのなす角である（言うまでもなく，$\varphi=\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$ （$n\in\mathbb{Z}$）である)。原点を中心に $-\varphi$ だけ回転すると $\vec{v}$ は x 軸の正の方向に重なり，直線 ℓ は y 軸と平行になる。

「移動後の双曲線」は

$$\begin{cases} x &= \dfrac{2\cos\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} \\ y &= \dfrac{2\sin\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} \end{cases}$$

と媒介変数表示することができる。

今度は，これをもとの双曲線 F_2 に戻す。まず原点を中心に $+\varphi$ だけ回転移動すると，

$$\begin{cases} x &= \cos\varphi\cdot\dfrac{2\cos\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} - \sin\varphi\cdot\dfrac{2\sin\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} \\ y &= \sin\varphi\cdot\dfrac{2\cos\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} + \cos\varphi\cdot\dfrac{2\sin\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} \end{cases}$$

ここで，$\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

$$\begin{cases} x &= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2\cos\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2\sin\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} \\ y &= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2\cos\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2\sin\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} \end{cases}$$

となる。次に，x 軸方向に $+4$，y 軸方向に $+1$ だけ平行移動すると

$$\begin{cases} x &= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2\cos\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2\sin\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} + 4 \\ y &= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2\cos\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2\sin\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} + 1 \end{cases}$$

これが，双曲線 F_2，すなわち双曲線 $xy + x - 2y - 4 = 0$ の媒介変数表示である。

（例 2 終）

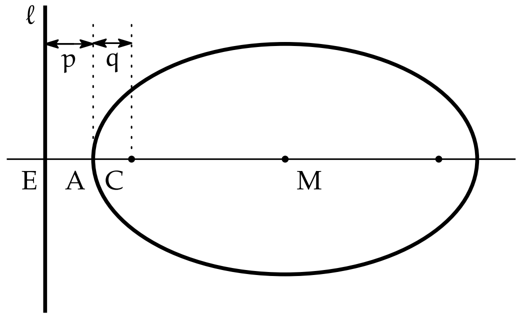
例 1，**例 2** からわかるように，「焦点」と「準線」と「離心率」さえわかれば，同様の手順を踏むことによって，任意の円錐曲線の媒介変数表示を求めることができる[脚注 13]。

あとがきに代えて

本稿の執筆中に思わぬ発見があったので，最後にそれを記しておく。

まずは「（正円でない）楕円」について。点 A,C,E，直線 ℓ，および正の数 p,q を，§1.1 と同様に定める。また，この楕円の中心を M とする。

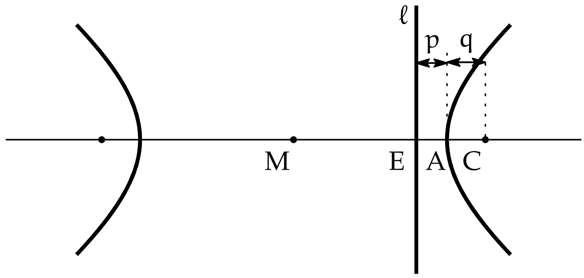
(脚注 13) 正円に対しては，$s \to \infty$ とすることで，媒介変数表示を与えることができる。詳細は割愛するが，中心 (x_0, y_0)，半径 r の円の媒介変数表示は，y 軸に平行な準線に対する楕円から $s \to \infty$ とした場合には $\begin{cases} x &= r\cos\theta + x_0 \\ y &= r\sin\theta + y_0 \end{cases}$ となる。



このとき，ちょっとした計算によって，CM,AM,EM の長さが，p,q を用いて次のように表されることがわかる。

$$\mathrm{CM} = \frac{q^2}{p-q}, \quad \mathrm{AM} = \frac{pq}{p-q}, \quad \mathrm{EM} = \frac{p^2}{p-q}$$

次に「双曲線」について。点 A,C,E，直線 ℓ，および正の数 p,q を，§1.2 と同様に定める。また，この双曲線の中心を M とする。



このとき，ちょっとした計算によって，CM,AM,EM の長さが，p,q を用いて次のように表されることがわかる。

$$\mathrm{CM} = \frac{q^2}{q-p}, \quad \mathrm{AM} = \frac{pq}{q-p}, \quad \mathrm{EM} = \frac{p^2}{q-p}$$

そして，「（正円でない）楕円」と「双曲線」の両者において，次の興味深い性質が得られるのである。

- $\mathrm{CM} : \mathrm{AM} = \mathrm{AM} : \mathrm{EM} = e : 1$ （$\because q : p = e : 1$）